

등각사상에 있어 Theodorsen 방정식의 고속해법

송 은 지[†]

요 약

단위원 내부로부터 Jordan영역으로의 등각사상을 구하는 방법은 일반적으로 경계대응함수에 관한 비선형 방정식인 Theodorsen 방정식을 푸는 것으로 귀착한다. Theodorsen 방정식의 기존의 여러 수치해법[1]중 Newton 법을 적용한 Hübner의 방법이 있다. 그의 방법은 비교적 수렴속도가 빠르고 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용하여 컴퓨터의 계산량과 기억용량을 대폭적으로 절약한 효율적인 해법으로 잘 알려져있다. 그러나, 수치실험 결과 난이도가 높다고 예상되는 문제에 있어서는 수렴속도가 느리다는 단점이 지적되었다. 본 논문에서는 저주파필터에 의해 수렴속도를 개선한 결과를 보고 하고 필터의 파라메터가 문제의 난이도를 측정하는 정량적인 기준이 될 수 있음을 서술한다.

Fast solver of Theodorsen equation for conformal mapping

En Jee Song[†]

ABSTRACT

Determinations of conformal mappings from the unit disk onto a Jordan region eventually requires solving the Theodorsen equation which is in general nonlinear with respect to the boundary correspondence function. Among the numerical methods for the Theodorsen equation is the Hübner's method applying the Newton iteration. His method is well known as an efficient one. The reason is that the convergence rate is relatively fast and the memory usage and computation time can be greatly reduced through the use of FFT(Fast Fourier Transform)

However, it has been pointed out that as a result of numerical experiments that the convergence is not so fast for the problems which seem to be highly complicated. In this paper we present a new alternative for fast convergence by applying a low-frequency filter to the Hübner's. As a result, convergence rate is much improved and the filter parameter can be a quantitative measure of the relative difficulty of a given problem.

1. 서 론

등각사상은 함수의 기본적인 문제의 하나로서 2차원 Laplace 방정식이 나타나는 열전도, 정전(靜電) potential, 유체의 문제에 이용되는 등 공학이나 물리학에

서 그 응용분야가 넓다.

일반적으로 등각사상은 수치계산법에 의해 구할 수 있으며 여기에는 표준영역에서 문제영역으로의 사상과 문제영역에서 표준영역으로의 사상을 구하는 것으로 대별되어 일반적으로 각기 독립된 분야로서 연구되고 있다. 그것은 표준영역에서 문제영역으로의 사상결정은 비선형방정식을 문제영역에서 표준영역으로의 사상결정은 선형방정식을 풀어야 하기 때

[†] 정 회 원: 남서울산업대학교 전자계산학과
논문접수: 1997년 10월 27일, 심사완료: 1998년 1월 2일

문이다. 수치등각사상을 구하는데 있어서는 보다 빠르고, 보다 정확하며 보다 적용범위가 넓은 계산법을 개발하는 것을 목적으로 하고 있다.

표준영역(단위원)의 내부에서 문제영역(Jordan 영역) 내부에로의 수치등각사상의 결정은 경계대용함수에 관한 비선형 적분방정식인 Theodorsen방정식을 푸는 것으로 귀착된다.

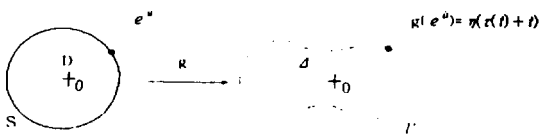
본 논문은 기존의 여러 Theodorsen 방정식의 해법 중 오차, 계산코스트면에서 비교적 뛰어나다고 인정되고 있는 Hübner의 방법을 다루기로 한다. 그는 Theodorsen 방정식에 Newton법을 적용하였는데 Jacobi 행렬을 구하는 대신 Riemann-Hilbert 문제[1, 3]로 유도하고 FFT를 이용하여 기억용량과 계산량을 대폭 절약한 아주 효율적인 방법이다. 그러나 문제의 난이도가 높다고 예상되는 문제에 있어서는 실험결과 수렴속도가 느려지는 단점이 지적되었다. 본 논문에서는 저주파필터에 의해 수렴속도를 개선하고 필터의 파라미터가 문제의 난이도를 측정하는 정량적인 기준이 될 수 있음을 서술한다.

2. Theodorsen 방정식

위에서 언급한 바와 같이 표준영역(단위원)에서 문제영역(Jordan 영역)내부에로의 수치등각사상을 구하는 문제는 다음에 설명하는 비선형 적분방정식인 Theodorsen 방정식을 푸는 문제로 귀착된다.

이하, S 를 단위원, D 를 그 내부, Γ 를 Jordan 폐곡선, Δ 를 그 내부라 한다(그림 1). 또한 g 를 D 로부터 Δ 에로의 등각사상으로 정규화 조건

$$g(0)=0, g'(0) > 0 \tag{1}$$



(그림 1) 표준영역에서 문제영역으로의 등각사상
(Fig. 1) Conformal mapping from the standard region onto problem region

을 만족하는 사상으로 한다.

Jordan 폐곡선 Γ 의 파라미터 표현을 η 라하면

$$\Gamma := \{\eta(t) : t \in T\}, T := \{t | 0 \leq t < 2\pi\}$$

로 정의 할 수 있다.

이렇게 하면, 원주상에서의 g 는 어떤 주기 2π 연속 함수 $\tau(t)$ 를 이용하여

$$g(e^{it}) = \eta(\tau(t) + t)$$

로 쓸 수 있다. 여기서, $A(\bar{D})$ 와 $A(\bar{D})|_{\Gamma}$ 를 다음과 같이 정의하자.

\bar{D} : D 와 D 의 경계를 포함한 영역

$A(\bar{D})$: D 에서 해석적(Analytic)이고 \bar{D} 에서 연속인 복소함수의 공간.

$A(\bar{D})|_{\Gamma}$: $A(\bar{D})$ 의 요소 h 의 경계함수 $f(t) = h(e^{it})$ 의 집합.

[정리1]

$$g: D \text{ 상에서 등각사상} \Leftrightarrow g \in A(\bar{D})$$

위의 정리1로부터 $g \in A(\bar{D})$ 이므로 등각사상 g 를 구하는 문제는 원주상에서 계산되면 내부에서도 계산할 수 있다. 따라서 등각사상 g 는 경계함수 $\eta(\tau(t) + t) \in A(\bar{D})|_{\Gamma}$ 를 결정하는 함수 $\tau(t)$ 를 구함으로써 결정된다.

결국 등각사상 g 를 구하는 문제는 η 가 주어지고 τ 를 구하는 문제로 귀결된다.

[정의1]

함수 f 가

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta} \quad \hat{f}_k: f \text{의 } k\text{번째 Fourier계수}$$

로 전개 되었을 때

$$Kf \sim -i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sign}(k) \hat{f}_k e^{ik\theta}$$

로 정의되는 K 를 공역작용소(共役作用素)라고 한다.

위의 정의1에서 정의한 공역작용소 K 를 이용한 다음과 같은 정리가 있다.

[정리2]

$$f(t) \in A(\bar{D})|_{\tau} \Leftrightarrow \text{Im } f(t) - \text{Im } \hat{f}_0 = K \text{Re } f(t)$$

$\text{Im } f(t)$: $f(t)$ 의 허수부 $\text{Re } f(t)$: $f(t)$ 의 실수부
 \hat{f}_0 : f 의 0차 Fourier계수

다음으로 (1)식의 정규화 조건을 만족하기 위해 보조함수 h 를 도입하여

$$g(z) = z e^{h(z)} \tag{2}$$

로 한다. 그러면 정규화조건 $g(0)=0$ 이고, $g'(0) > 0$ 은 $g'(0) = e^{h(0)} > 0$ 이므로 $\text{Im } h(0) = 0$ 을 만족하면 된다.

(2)식을 h 에 대해 정리하고 경계함수 G 를 도입하여 다음과 같이 정의한다.

$$h(e^{it}) = \log(g(e^{it})/e^{it}) = \log(\eta(\tau(t) + t)/e^{it}) =: G\tau(t) \tag{3}$$

여기서 $\text{Im } h(0) = 0$ 로 $\text{Im } G_0 = 0$ 이 되므로 정리2로부터

$$G\tau(t) \in A(\bar{D})|_{\tau} \Leftrightarrow \text{Im } G\tau(t) = K \text{Re } G\tau(t)$$

$$\therefore \text{Im } G\tau(t) - K \text{Re } G\tau(t) = 0 \tag{4}$$

인 Theodorsen방정식이 유도된다.

여기서는 문제영역이 $\eta(t) = \rho(t)e^{it}$ 로 극좌표 표현되는 영역만을 취급하기로 한다. 즉 (3)식을 극좌표 표현하여 정리하면

$$G\tau(t) = \log \rho(\tau(t) + t) + i\tau(t) \tag{5}$$

$$\text{Re } G\tau(t) = \log \rho(\tau(t) + t), \text{Im } G\tau(t) = \tau(t)$$

이 되므로 Theodorsen방정식 (4)를

$$\Psi\tau(t) = \tau(t) - K \log \rho(\tau(t) + t) = 0 \tag{6}$$

과 같이 정의할 수 있으며 이 비선형 Theodorsen방정식(6)을 풀기 위한 여러가지 해법이 있다[논문1].

다음 장에서는 (6)식의 여러해법 중 Hübner의 방법[논문2]을 소개하고 본 연구자가 개발한 방법과 비교하여 보기로 한다.

3. Hübner 방법의 개략

Hübner는 비선형 방정식(6)을 Newton법으로 풀어 반복법은 2차 수렴하고 또한 Jacobi행렬을 사용하지 않고 Riemann-Hilbert문제[논문3]로 유도하여 기억용량을 감소시켰다. 통상 Jacobi행렬은 표본수 N 에 대하여 $O(N^2)$ 의 기억용량이 필요하나 Riemann-Hilbert 문제로서 풀면 $O(N)$ 의 기억용량으로 절약된다. 그는 더구나 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용하여 $O(N^3)$ 의 계산량을 $O(N \log N)$ 으로 절약하여 이 방법은 상당히 경제적이라 할 수 있다. 그러나 수치실험 결과 문제의 난이도가 높다고 예상되는 문제에 있어서는 수렴 속도가 느려져 2차 수렴 하지 않음을 알 수 있었다. 이 문제를 본 연구자가 개발한 저주파 필터(filter)를 이용하여 극복할 수 있었으므로 보고하고자 한다.

3.1 Hübner의 반복법

Hübner는 원래의 비선형 방정식(6)을 다음과 같은 Newton법으로 풀었다.

$$\Psi\tau_k(t) + \Psi_{\tau_k} \delta_k(t) = 0 \tag{7}$$

$$\tau_{k+1}(t) = \tau_k(t) + \delta_k(t)$$

Ψ_{τ_k} : τ_k 에서의 Frechet미분 $k=0, 1, 2, \dots$ (반복횟수)

Ψ 의 τ 에서의 Frechet 미분을 계산하면 (7)식은

$$\Psi_{\tau} \delta(t) = \delta(t) \text{Im } \xi(t) - K[\delta \text{Re } \xi](t)$$

$$\xi(t) := \rho'(\tau(t) + t) / \rho(\tau(t) + t) + i$$

이 되므로 다음과 같이 대입하여 정리할 수 있다.

$$\Psi\tau(t) + \Psi_{\tau} \delta(t) = \delta(t) \text{Im } \xi(t) - K(\delta(t) \text{Re } \xi(t)) + \Psi\tau(t) = 0 \tag{8}$$

$$\Psi\tau(t) + \delta(t) \text{Im } \xi(t) = K(\delta(t) \text{Re } \xi(t))$$

(8)식을 정리2에 적용하면 원주상에서 함수 f 를

$$f(e^{it}) := \xi(t)\delta(t) + i\Psi\tau(t), f(e^{it}) \in A(\bar{D})|_{\tau}, \text{Im } f(0) = 0 \tag{9}$$

로 정의할 수 있다.

(9)식을 변형하면

$$Re(i\xi(t) f(e^{it})) = -\Psi \tau(t) Re\xi(t) \tag{10}$$

로 되어 $f(e^{it}) \in A(\overline{D})|_T$ 를 구하는 Riemann-Hilbert문제로 해석할 수 있다.

Riemann-Hilbert의 문제의 해인 $f(e^{it}) \in A(\overline{D})|_T$ 는 다음과 같이 구할 수 있음이 알려져 있다[논문1, 3].

$$\begin{aligned} f(e^{it}) &= (iq + \sigma(t) + iK \sigma(t)) \exp(-K \phi(t) + i\psi(t)) \\ \phi(t) &= \arg \xi(t) - \pi/2 \\ \sigma(t) &= \Psi \tau(t) \sin \phi(t) \exp(K \phi(t)) \\ q &= -\hat{\sigma}_0 \tan \hat{\sigma}_0 \\ \hat{\sigma}_0 &: \sigma \text{의 } 0\text{번째 Fourier 계수} \\ \hat{\phi}_0 &: \phi \text{의 } 0\text{번째 Fourier 계수} \end{aligned}$$

이렇게 해서 구한 f 를 (9)식에 대입하여

$$\delta(t) = \frac{f(e^{it}) - i\Psi \tau(t)}{\xi(t)}$$

로 수정량 δ 를 계산한다.

수치계산을 하기 위해 이산화를 하는데 짝수 표본점 $N=2m$ 을 사용하여

$$t_j = 2\pi j/N, t = (t_0, t_1, \dots, t_{N-1})^T$$

로 하고 t 의 함수인 f 를 t_j 상에서 표본화한 것을

$$f_j = f(t_j), f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$$

로 한다.

정의1의 공역작용소(共役作用素)K는 다음과 같이 이산화 한다.

$$\begin{aligned} x &\rightarrow F_N \quad (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n; b_1, b_2, \dots, b_{n-1})^T \\ &\quad \downarrow \hat{K}_N \\ y &\rightarrow F_N^{-1} (0, -b_1, \dots, -b_{n-1}, 0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T \end{aligned}$$

F_N : 이산형 Fourier 변환
 F_N^{-1} : 이산형 Fourier 역변환,

\hat{K}_N : 공역작용소에 의한 Fourier계수 변환
 즉, 이산화된 공역작용소는

$$K_N: F_N^{-1} \hat{K}_N F_N$$

이 된다.

결국 Theodorsen방정식(6)을 이산영역에서 다시 쓰면

$$\tau = K \log \rho(\tau + t) \tag{11}$$

이 된다. 여기서, 스칼라 함수 σ 를 $s \in R^N$ 에 대하여

$$\sigma(s) := (\sigma(s_0), \sigma(s_1), \dots, \sigma(s_{N-1}))^T$$

로 정의 한다.

3.2 저주파 필터(filter)를 이용한 반복법

3.1에서 설명한 Hübner반복법을 이산영역에서 순서대로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Psi(\tau_k) + \Psi_{\tau_k} \delta_k &= 0 \\ \tau_{k+1} &= \tau_k + \delta_k \\ k &= 0, 1, \dots \\ (1) k &\leftarrow 0 \\ (2) \xi_k &= \rho(\tau_k + t) / \rho(\tau_k + t) + i \\ (3) \phi_k &= \arg \xi_k - \pi/2 \\ (4) \sigma_k &= \Psi \tau_k \sin \phi_k \exp(K_N \phi_k) \\ (5) q_k &= -\hat{\sigma}_0 \tan \hat{\phi}_0 \\ (6) f_k(e^{it}) &= (iq_k + \sigma_k + i K_k \sigma_k) \exp(-K_k \phi_k + i \psi_k) \end{aligned}$$

$$(7) \delta_k = \frac{f_k(e^{it}) - i\Psi \tau_k}{\xi_k}$$

$$(8) |\delta_k| < \epsilon, \epsilon: \text{요구정도}$$

이면 끝내고 아니면 (9)로 간다.

$$(9) \tau_{k+1} = \tau_k + \delta \tau_k, k \leftarrow k + 1 \text{로 하여 (2)번으로 간다.}$$

위의 알고리즘과 같이 수치 실험을 한 결과 어떤 문제(문제의 난이도가 높다고 예상되는 문제)에 있어

서는 수렴 속도가 느려졌다. 그 원인을 분석하여 근사값 τ_{k+1} 에 FFT를 적용했을 때 고주파성분이 크다는 것을 실험 결과 알 수 있었다. 그것에 따라 다음과 같은 저주파필터(low-frequency pass filter)를 고안하였다.

저주파 필터 L_l 을

$$L_l(e^{im}) = \begin{cases} e^{iml} : 0 \leq |m| \leq n-l \\ 0 : n-l < |m| \leq n \end{cases} \quad (12)$$

로 정의한다. (12)의 l 은 뒤에서부터 몇개의 고주파 성분을 제거할까를 나타내는 파라미터이다. (12)에서 정의한 저주파 필터 L_l 을 위에 서술한 Hübner 반복법의 알고리즘에서 (9)단계 다음에 적용시킨다.

즉, (9)단계에서 수렴량 δ_k 에 의한 새로운 해 τ_{k+1} 를 구한후 L_l 은 다음과 같이 적용시켜서 그것을 새로운 해 τ_{k+1} 로 하여 이것을 (10)단계로 하자.

$$(10) \tau_{k+1} \leftarrow L_l(\tau_k) = \tau_k + \delta_k, k=0, 1, 2, \dots$$

다음은 (1)~(9)의 Hübner 반복법과 저주파 필터 과정을 거친 (1)~(10)의 방법으로 실제로 계산기상에 실현시킨 수치실험 결과를 보고한다.

4. 수치실험

동각사상의 계산 예로서 문제영역이 편심원(偏心圓)을 취급한다. 이것은 반복법에 의한 해(근사치)와 수학적인 정해(正解)의 오차를 알 수 있는 고전적인 예이기 때문이다. 주어진 조건과 구하고자 하는 해는 다음과 같다.

경계가 $\eta(s) = \rho(s)e^{is}$ 로 극좌표 표현되었을 때

$$\text{주어진 조건: } \rho(s) = \frac{r \cos s + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 s}}{r + 1}, 0 \leq r < 1$$

$$\text{구하고자 하는 해: } \tau(t) = \arctan \frac{r \sin t}{1 - r \cos t}$$

과 같다.

초기치들 $\tau_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ 로 하고 FORTRAN 배열도(double precision)로 요구정도는 $\|\tau_k - \tau_{k+1}\|_2 < 10^{-14}$ (수렴할 때까지)로 한다.

수치실험 결과를 나타내는 표에서 기호의 의미는

다음과 같다.

k : 반복횟수

r : 문제영역 형상 파라미터

N : 이산화한 표본수

$\delta_k = \|\tau_k - \tau_{k+1}\|_2$: 수렴량

$E_k = \|\tau - \tau_{k+1}\|_2$: 오차

수치실험의 예로서 다문 편심원은 형상 파라미터 r 이 1에 가까울수록 문제 영역의 모양이 복잡해져서 난이도가 높아진다. 표 1에서 알 수 있듯이 비교적 난이도가 낮은 문제($r=0.5$)에서는 종래의 Hübner의 방법으로 약 10회 반복후 수렴하므로 별 문제가 되지 않지만 문제가 어려울수록(r 이 1에 가까울수록) 수렴 속도가 느려져서 $r=0.7$ 일때는 약 16회 $r=0.9$ 일때는 50회 이상 반복해야 수렴한다(표 2). 그러나 표 3에서 알 수 있듯이 저주파 필터를 이용한 반복법으로 실험한 결과 $r=0.9$ 일때는 8회에서 수렴하므로 훨씬 경제적이다. 난이도가 높은 $r=0.95$ 일때의 수렴정도(精度)를 비교한 결과인 표 4에서 알 수 있듯이 종래의 Hübner 방법으로는 11회에서 $\delta_{11} = 0.31 \cdot 10^{-4}$ 인 반면에 저주파필터를 적용하여 개량한 방법으로는 $\delta_{11} = 0.69 \cdot 10^{-2}$ 로 수렴하여 어려운 문제에 있어서도 2차수렴에 가까운 빠른 속도로 개선되었다. 여기서 알 수 있었던 또 한가지는 문제영역의 변형이 심할수록 즉 r 이 1에 가까워질수록 파라미터의 크기 l 이 커진다는 것이다. 이것은 필터파라미터의 크기가 문제의 난이도를 측정할 수 있는 정량적인 지표가 될 수 있음을 시사한다.

〈표 1〉 $r=0.5$ 일 때 Hübner 반복법의 결과
〈Table 1〉 Result by Hübner iteration if $r=0.5$

$r =$.500	$N = 64$
k	δ_k	E_k
1	.215E+02	.998E+00
2	.997E+00	.228E-02
3	.228E-02	.162E-07
4	.162E-07	.214E-09
5	.992E-10	.313E-09

6	.248E-10	.338E-09
7	.620E-11	.344E-09
8	.155E-11	.345E-09
9	.389E-12	.346E-09
10	.944E-13	.346E-09
11	.291E-13	.346E-09
12	.148E-13	.346E-09
13	.122E-13	.346E-09
14	.927E-14	.346E-09
15	.104E-13	.346E-09

<표 2> $r = 0.7, r = 0.9$ 일 때 Hübner 반복법의 수렴속도 비교
<Table 2> Comparison of convergence behaviors by Hübner's iteration if $r = 0.7$ and $r = 0.9$

$r = .700$ N = 128			$r = .900$ N = 256		
k	δ_k	E_k	k	δ_k	E_k
1	.649E+02	.741E+01	1	.202E+03	.589E+02
2	.748E+01	.197E+00	2	.733E+02	.229E+02
3	.197E+00	.155E-03	3	.210E+02	.220E+01
4	.155E-03	.971E-10	4	.217E+01	.329E-01
5	.181E-09	.169E-09	5	.329E-01	.895E-05
6	.860E-10	.255E-09	6	.897E-05	.224E-05
7	.422E-10	.297E-09	7	.158E-05	.382E-05
8	.207E-10	.318E-09	8	.128E-05	.511E-05
9	.101E-10	.328E-09	9	.104E-05	.614E-05
10	.496E-11	.333E-09	10	.841E-06	.698E-05
11	.243E-11	.335E-09	11	.681E-06	.766E-05
12	.119E-11	.337E-09	12	.551E-06	.822E-05
13	.586E-12	.337E-09	13	.447E-06	.866E-05
14	.289E-12	.337E-09	14	.362E-06	.902E-05
15	.151E-12	.338E-09	15	.293E-06	.932E-05
16	.883E-13	.338E-09	16	.237E-06	.955E-05
17	.548E-13	.338E-09	17	.192E-06	.995E-05
18	.563E-13	.338E-09	18	.156E-06	.990E-05

<표 3> $r = 0.9$ 일 때 저주파 필터를 적용한 반복법의 결과
<Table 3> New test result by low pass filter if $r = 0.9$

$r = .900$ N = 256		
k	δ_k	E_k
1	.202E+03	.589E+02
2	.733E+02	.229E+02
3	.210E+02	.220E+01
4	.217E+01	.329E-01
5	.329E-01	.121E-04
6	.895E-05	.658E-05
7	.386E-11	.658E-05
8	.252E-12	.658E-05
9	.244E-12	.658E-05
10	.184E-12	.658E-05
11	.254E-12	.658E-05
12	.189E-12	.658E-05
13	.209E-12	.658E-05
14	.218E-12	.658E-05
15	.213E-12	.658E-05

<표 4> $r = 0.95$ 일 때 Hübner 반복법과 저주파 필터를 적용한 반복법의 결과 비교

<Table 4> Comparisons of convergence behaviors calculated by Hübner's iteration and new iteration with low pass filter

$r = .950$ N = 512					
Hübner			저주파 필터이용		
k	δ_k	E_k	k	δ_k	E_k
1	.484E+03	.192E+03	1	.484E+03	.192E+03
2	.282E+03	.138E+03	2	.282E+03	.138E+03
3	.170E+03	.443E+02	3	.170E+03	.443E+02
4	.577E+02	.205E+02	4	.577E+02	.205E+02
5	.165E+02	.450E+01	5	.165E+02	.450E+01
6	.424E+01	.286E+00	6	.424E+01	.286E+00
7	.285E+00	.140E-02	7	.285E+00	.138E-02
8	.138E-02	.365E-03	8	.138E-02	.403E-05
9	.383E-04	.327E-03	9	.396E-07	.403E-05
10	.346E-04	.292E-03	10	.558E-11	.403E-05

11	.312E-04	.261E-03	11	.693E-12	.403E-05
12	.282E-04	.233E-03	12	.801E-12	.403E-05
13	.254E-04	.207E-03	13	.945E-12	.403E-05
14	.230E-04	.184E-03	14	.719E-12	.403E-05
15	.207E-04	.164E-03	15	.686E-12	.403E-05

표 5는 같은 문제에 있어서 필터파라미터의 크기를 늘려 가면서 수렴했을 때의 반복횟수와 오차를 나타낸 것이다. 표에서 알 수 있듯이 필터를 크게 하면 할수록 수렴속도는 빨라지지만 오차는 점차 커진다. 그러므로 문제에 따라 계산코스트와 오차를 고려하여 효율적인 필터의 크기를 결정 해야한다.

<표 5> 저주파 필터파라미터의 크기에 따른 수렴속도와 오차

<Tabel 5> Convergence rates and errors followed by the scale of low filter parameters

r = .950 N=512

필터 파라메타 크기	1	3	5	7	10
수렴에 필요한 반복횟수	20	12	11	10	9
오차	0.4E-6	0.9E-6	0.17E-5	0.26E-5	0.4E-5

5. 결 론

등각사상을 구하기 위한 Theodorsen방정식의 여러 해법 중 Newton법인 Hübner의 방법은 계산코스트와 기억용량면에서 효율적인 방법으로 알려져있다. 그러나, 수치실험 결과 난이도가 높다고 예상되는 문제에 있어서는 수렴속도가 2차 수렴하지 않고 점점 느려짐을 알 수 있었다.

본 논문에서는 그 원인을 분석한 결과 FFT를 적용했을 때 근사치의 고주파 성분이 크다는 것을 알게 되어 저주파필터(low-freauency pass filter)를 고안하여 제시하였다. 그리고 실지로 Hübner의 방법으로 수렴속도가 느린 문제에 대하여 저주파필터를 적용한 결과 수렴속도를 상당히 빠르게 할 수 있음을 보였다. 뿐만 아니라 문제가 어려울수록 필터 파라메터

의 크기가 커진다는 것을 알 수 있었다. 이것은 필터의 크기가 문제의 난이도를 측정하는 정량적인 지침이 될 것임을 시사한다. 현재, 필터 파라메터의 크기는 경험에 의존하고 있으나 오차와 계산량을 고려한 효율적인 필터 파라메터를 자동적으로 결정하는 것이 앞으로의 과제라고 본다. 이것은 문제영역의 변형이 크면 클수록 문제의 난이도가 높다고 예상됨으로 문제영역의 모양을 결정하는 함수를 분석하면 가능하리라 기대된다.

본 연구의 결과로 보아 저주파필터의 적용은 Hübner 뿐만 아니라 등각사상을 구하기 위한 Theodorsen 방정식의 그의 해법에도 유효할 것임이 예상된다.

참 고 문 헌

- [1] Gutknecht, M.H., 'Numerical conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation', J. Comput. Appl. Math. 14, No. 1, 2, pp. 31-77, 1986.
- [2] Hübner, O., 'The Newton method for solving the Theodorsen integral equation', J. Comput. Appl. Math. 14, No. 1, 2, pp. 19-29, 1986.
- [3] Muskhelishvili, N.I., 'Singular Integral Eequations Noordhoff', Leiden, 1953.
- [4] 宋 殷志, 杉浦 洋, 櫻井 鐵也, '等角寫像に關する Wegmannの方法の不安定性のの解析とその安定化', 日本報處理學會論文誌, 32, No. 2, pp. 126-132, 1991.
- [5] Wegmann, R., 'Discretized versions of Newton type iterative methods for conformal mapping', J. Comput. Appl. Math. 29, No. 2, pp. 207-224, 1990.
- [6] 宋 殷志, 杉浦 洋, 'Wegmann法に基づく數値等角寫像の自動化について', 日本報處理學會論文誌, 35, No. 2, pp309-312, 1994.
- [7] 송은지, '등각사상의 고속해법 개량에 관한 연구', 한국정보처리학회 97 춘계학술발표논문집, pp905-910, 1997.



송 은 지

1984년 숙명여자대학교 수학과
(이학사)

1988년 일본 나고야(名古屋)국
립대학 정보공학과(공
학석사)

1991년 일본 나고야(名古屋)국
립대학 정보공학과 (공
학박사)

1991년~1992년 일본 나고야(名古屋)국립대학 정보
공학과 객원 연구원

1993년~1995년 연세대학교 전자계산학과 시간강사

1993년~1995년 상지대학교 병설 전문대학 전자계
산학과 전임강사

1996년~현재 남서울산업대학교 전자계산학과 전임
강사

관심분야: 수치해석, 컴퓨터 그래픽스