

수정된 페널화 EM 그래디언트 알고리즘을 이용한 투과형 토머그래피의 영상재구성

송 민 구[†] · 박 정 기^{††}

요 약

본 논문에서는 투과형 토머그래피 영상재구성을 위하여 EM 알고리즘을 사용하는 경우에 발생하는 문제점을 해결할 수 있는 방안을 제시한다. 일반적으로 토머그래피 영상재구성과 같은 다-차원의 모수 추정인 경우에는 그것의 페널티 함수의 헤지안행렬의 역행렬 차수가 매우 높기 때문에 그것을 직접적으로 계산할 수 없다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 PEMG-1 알고리즘을 제안한다. 이 알고리즘은 페널티 함수를 사용하는 그래디언트 형태의 알고리즘인데 이것은 Lange(1995)와 Green(1990)의 알고리즘에서 지적된 문제점을 동시에 해결할 수 있다.

Image Reconstruction of Transmission Tomography for Modified Penalized EM Gradient (PEMG-1) Algorithm

Min-Koo Song[†] · Jeong-Ki Park^{††}

ABSTRACT

In this paper, we suggest method for solving the problem which is occurred in the case of using EM algorithm to estimate the transmission tomography image reconstruction. In case of estimation of high-dimension parameter such as tomography image reconstruction, dimension of this inverse matrix is so high a grade that it is almost impossible to calculate it. To resolve this problem, we suggest a modified penalized EM gradient algorithm, say PEMG-1. This algorithm is a gradient-typed EM algorithm with a penalty function and its solution can be easily found even though either the EM gradient algorithm of Lange (1995) or the OSL algorithm of Green (1990) are not available.

1. 서 론

x -선 혹은 γ -선에 의한 단층촬영(tomography)은 단층영상자료(scan data)를 얻는 방법에 따라 방출형(emission tomography)과 투과형(transmission tomography)으로 나눈다. 전자는 방사성 의약품을 피사체에 투여한 후, 그곳으로부터 방출된 에너지를 검출기(detector)에서 받은 자료를 기초로 하는 반면, 후자는 피사체 외부의 에너지 방사원(source)에서 발생한 에너지를 피사체에 투과하여 검출기에 도달한 에너지를 변환한 후 이 변환된 자료를 기초로 피사체의 횡단면 영상(crosssectional image)를 간접 추정하는 기법이다. 보통 발생원의 에너지가 x -선이나 γ -선을 에너지로 하는 투과형 토머그래피를 일반적으로 CT라 부른다.

전통적인 투과형 토머그래피에 대한 영상재구성(reconstruction)은 CBP(convolution back-projection) 알고리즘을

이용한 방법을 사용하고 있다. Radon 변환과 Fourier/Convolution 기법을 기초로하고 있는 이 방법은 처리속도가 매우 빨라서 실용적 가치가 높다(Z.H.Cho et al., 1993). 그러나 광자의 강도가 약한 저준위 조사량에 대한 영상재구성에서는 양질의 재구성 영상을 제공하지 못할 뿐만 아니라 검출기에 도달한 광자(photon)의 수는 확률변수이므로 통계적 접근의 필요성이 제기된다(K. Lange, R. Carson, 1984).

K. Lange와 R. Carson(1984)은 토머그래피에 대한 통계모형을 설정하였으며, 추정방법은 반복적 기법인 EM 알고리즘을 사용하였다. 이 알고리즘은 저준위 조사량에 대한 영상재구성시 기존의 방법보다 나은 영상을 제공하고, 알고리즘의 반복해는 항상 로그-우도를 단조 증가시키는 성질을 가지므로 반복이 거듭 될수록 양질의 영상을 나타낸다. 그러나 K. Lange와 R. Carson(1984)의 방법은 투과형 모형의 토머그래피 영상재구성시 $Q(\theta|\theta)$ 함수를 직접적으로 구하지 못하고 근사치를 사용함으로써 정확한 추정값을 구할 수 없으며, 또한 수렴속도가 매우 느리다는 단점을 가지고

[†] 정 회 원 : 한국 NCR 데이터 마이닝팀 팀장

^{††} 정 회 원 : 한양대학교 전기전자공학부 교수
논문접수 : 2000년 8월 21일, 심사완료 : 2001년 4월 18일

있다. K Lange과 M. Bahn 그리고 R. Liffle(1987)은 EM 알고리즘의 수렴속도를 향상시키기 위해서 EM 알고리즘의 변형인 EMS(expectation maximization and search) 알고리즘을 제안하였다. 그러나 EMS 개념은 수렴속도를 향상시키는 것은 하였으나 반복형 처리시간을 줄이지는 못하였다.

전술한 단점을 극복하기 위한 방안으로서 사전정보(prior)을 사용하는 베이지안 추정법이 있다. 그런데, 베이지안 기법을 사용한 EM 알고리즘의 변형은 사전정보(prior information)를 사용할 수 있으므로 재구성 화질 뿐 아니라 수렴속도를 향상시킬 수 있다. 또한, 사전분포의 사용은 모수추정치가 이웃하는 픽셀보다 차이가 많은 경우 제약화(penalized)함으로써 근린(neighborhoods)의 효과를 나타낸다. 이러한 맥락에서 P. J. Green(1990)은 EM 알고리즘의 M-단계에서 근사해를 제공하는 OSL(one-step-late)알고리즘을 제시하였다. 그러나, OLS 알고리즘은 전개의 어려움이 $Q(\theta|\theta)$ 함수 뿐만 아니라 페널티 함수가 θ 에 대한 평활도(smoothness) 또는 불균일도(roughness)를 나타내는 함수로 주어질 때 이 알고리즘의 적용은 사실상 불가능해지는 경우가 많다.

Meng과 Rubin(1993)은 복잡한 M-단계 대신 계산하기 편한 CM-단계를 대치하여 이 문제를 해결하려 하였고, K. Lange(1995)는 EM 알고리즘의 수렴속도가 매우 느리다는 점에 착안하여 각 M-단계에서 「뉴턴」 알고리즘의 1단계 추정치를 사용하는 EM 그래디언트 알고리즘을 제안하였다. 이 알고리즘은 M-단계를 전개하기가 편리하고, $Q(\theta|\theta)$ 함수의 헤이지안 행렬이 역행렬이 필요없는 대각행렬이며 수렴속도도 빠르다는 장점을 가지고 있다.

본 연구에서는 앞서 지적한 두알고리즘의 문제점을 해결하기 위하여 EM 그래디언트 알고리즘에 깃스 사전분포를 결합한 PEMG(penalized EM gradient)알고리즘이 지니는 문제점을 해결하기 위한 방안을 강구한다. 즉 θ 가 불균일도를 나타내는 함수로 주어질 때 페널티 함수의 헤이지안 행렬이 대각행렬이 아니므로 이 알고리즘은 역행렬을 구해야 하는 문제점이 발생한다. 그런데, 토머그래피 영상재구성에서는 이 역행렬의 차수가 매우 크므로 실용성에서 문제점이 제기된다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위해서 본 논문에서는 PEMG 알고리즘을 변형한 PEMG-1 알고리즘을 제안하고, 제안된 PEMG-1 알고리즘을 이용하여 투과형 토머그래피의 영상재구성을 효율적으로 할 수 있는 방법에 대하여 다음과 같은 체계로 전개하고자 한다. 2장은 토머그래피 영상재구성을 위한 알고리즘의 종류를 설명하였고, 3장은 EM 알고리즘을 이용한 토머그래피의 영상재구성을 이론적으로 고찰하였다. 4장은 제안된 PEMG-1 알고리즘의 이론적인 도출과 수렴성질 및 PEMG-1 알고리즘을 투과형 모형에 적용하여서 감쇠계수 θ 를 유효하게 추정하는 이론을 전개하였다. 제5장은 제안된 PEMG-1 알고리즘

의 효율성을 토머그래피 영상재구성의 모의실험을 통하여 확인한다.

2. 토머그래피의 영상재구성을 위한 알고리즘

2.1 CBP(convolution back-projection) 알고리즘

임의의 각 θ 에 대해 $l_\theta = [\cos \theta, \sin \theta]^T$ 및 $n_\theta = [-\sin \theta, \cos \theta]^T$ 라 정의하자. 여기서 l_θ 는 단위벡터이며 n_θ 는 단위정규 벡터이다. 주어진 θ 에 대해 \mathbb{R}^2 상의 임의의 점 $t = [x, y]^T$ 는

$$t = ul_\theta + sn_\theta \quad u, s \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

로 항상 나타낼 수 있다.

함수 $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^2$ 는 완전한 지지를 갖는 well-behaved 함수라 할 때, Radon 변환의 선 적분은 다음과 같이 정의한다.

$$g(s; \theta) = \int f(ul_\theta + sn_\theta) du, \quad -\infty < s < \infty, \quad 0 \leq \theta < \pi \quad (2.2)$$

Radon 변환은 투과형 토머그래피에 아주 적합하다. 왜냐하면, 한 투사에서 관측된 광자의 합(ray-sum)을 식 (2.2)의 근사치로 사용할 수 있기 때문이다. 한편, 식 (2.2)의 s 에 관한 Fourier 변환은,

$$G(\beta; \theta) = \int \exp(-is\beta) g(s; \theta) ds \quad (2.3)$$

으로 주어진다. 여기서, $\omega = \beta n_\theta \in \mathbb{R}^2$ 라 놓으면,

$$G(\beta; \theta) = \iint \exp(-i\omega t) f(t) dt = F(\omega) \quad (2.4)$$

과 같이 $f(t)$ 의 이변량 Fourier 변환으로 나타낼 수 있다. 상기의 내용은 s 와 θ 를 알 때 Radon 변환은 $f(t)$ 의 Fourier 변환을 결정하며, 결국 Fourier 역 변환에 의해 $f(t)$ 자체가 결정될 수 있음을 말하고 있다.

CBP는 Fourier 변환의 근사적 역을 기초하여 $f(t)$ 를 재구성하는 알고리즘이다. 극좌표를 사용하여,

$$f(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \exp(it\omega) F(\omega) d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \exp(is\omega) G(\beta; \theta) |\beta| d\beta d\theta \quad (2.5)$$

으로 쓸 수 있다. 단, $\omega = sn_\theta$ 이다.

식 (2.5)에서 $\beta \rightarrow \infty$ 에 따라 $|\beta| \rightarrow \infty$ 이므로 본 논문에서는 $|\beta|$ 대신

$$\phi(\beta) = \begin{cases} \frac{2}{h} |\sin(h\beta/2)|, & |\beta| \leq 2\pi/h \\ 0, & |\beta| > 2\pi/h \end{cases} \quad (2.6)$$

을 사용하기로 한다. 식 (2.6)은 $|\beta|$ 가 작을 때 $\Phi(\beta) \approx |\beta|$ 를 만족한다. 모수 $h > 0$ 은 해상도(resolution)를 결정하며, $h \rightarrow 0$ 일수록 근사의 오차는 줄어들어 화질은 향상된다.

$\phi(\beta)$ 를 β 의 역 Fourier 변환이라 하자. 식 (2.5)에서 $|\beta|$ 대신 $\Phi(\beta)$ 를 사용하고 Parseval 관계를 이용하면,

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \exp(is\omega) G(\beta; \theta) \Phi(\beta) d\beta d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} g(s'; \theta) \phi(s-s') ds' d\theta \end{aligned} \quad (2.7)$$

을 얻을 수 있다. Shepp 와 Kruskal(1978)는 식 (2.7)의 적분을 이산형 형태로 구현하는 방법을 설명하고 있다. 만약 Radon 변환이 이산형 격자(grid)로 관측된다면 해상도 h 를 화소 너비와 같도록 선택한다.

2.2 EM 알고리즘

EM 알고리즘은 불완전 자료(incomplete data)에 대하여 최우추정치를 구하는 일반적인 반복기법(iterative method)이다[2].

먼저, 자료공간(data space) y 는 관측된 불완전 자료, y_{mis} 는 결측자료, x 는 완전자료로 설정한다. 일반적으로 완전자료와 관측된 불완전 자료와의 관계를 $y = y(x)$ 와 같은 함수관계로 나타낼 수 있는데 이들의 관계를 밀도함수를 사용하여 구체적으로 나타내면,

$$g(y|\theta) = \int_{\{x: y(x)=y\}} f(x|\theta) dx \quad (2.8)$$

이다. 여기서, $f(x|\theta)$ 는 완전자료의 확률밀도함수이다.

한편 완전자료의 대수우도 $L(\theta) = \ln f(x|\theta)$ 라 하면, 완전자료 x 는 관측할 수 없는 자료이므로 $L(\theta)$ 를 직접 결정하지 못한다. 단지 불완전 자료 y 가 주어졌을 때, 기대값으로 간접평가 할 수 있을 뿐이다. 그래서 다음과 같은 완전자료 대수우도에 대한 조건부 기대값을 평가함수(evaluation function)라 한다.

$$Q(\theta|\theta^n) = E[\ln f(x|\theta)|y, \theta^n] \quad (2.9)$$

여기서, θ^n 는 n 시점의 추정치 이고, $\ln f(x|\theta) = l(\theta|x)$ 는 완전자료의 대수우도이다. 따라서, EM 알고리즘을 정리하면 E단계와 M단계로 요약할 수 있다.

- E-단계: 평가함수 $Q(\theta|\theta^n) = E[\ln f(x|\theta)|y, \theta^n]$ 를 구한다.
- M-단계: 평가함수 $Q(\theta|\theta^n)$ 를 최대화하는 $\theta = \theta^{n+1}$ 을 구한다.

2.3 OLS(One-Step-Late)알고리즘

다음은 모수 θ 에 대한 사전정보를 가지고 있는 경우에 대하여 살펴보자. 이는 아마도 사전확률분포나 θ 에 대한 평활도(smoothness)로 주어질 것이다. 이때, 우리의 목적은 각각 MAP(maximum a posterior)추정량 또는, MPL(maximum

penalized likelihood)추정량을 구하는 것이 될 것이다. 그런데 본 논문에서는 두 추정량을 같은 것으로 간주하겠다. 우리가 구하려는 MAP 혹은 MPL추정량 $\hat{\theta}$ 은

$$L(\theta) - \lambda J(\theta) \quad (2.10)$$

을 최대화함으로써 얻게된다. 여기서, $\exp(-\lambda J(\theta))$ 는 θ 의 사전분포에 비례한다고 가정하며, λ 는 평활상수(smoothing constants)이고, $J(\theta)$ 는 함수의 불균일도(roughness)이다. $\hat{\theta}$ 에 대한 EM 알고리즘은,

$$Q(\theta^n|\theta) - \lambda J(\theta^n) \quad (2.11)$$

를 최대화하는 시추정치(trial estimates) θ^n 반복적으로 교체함으로써 얻게된다.

2.4 EM 그라디언트 알고리즘

최우추정 문제에서 EM 알고리즘을 적용할 때, M-단계에서 모수벡터 θ 에 대한 전계가 극히 어려운 경우를 자주 접하게 된다. 이러한 경우에는 사실상 EM 알고리즘의 적용이 불가능해 지는데, 이 문제를 해결하기 위한 방법 중 하나가 그라디언트 방법을 사용하는 것이다. EM과 제약화 EM 알고리즘의 수렴 과정의 주목할 만한 특징은 다음과 같다. 즉, 단계가 진행됨에 따라 두 알고리즘은 각각 대수우도와 제약화 대수우도를 증가시킨다. 이는 결국, 두 알고리즘이 각각 $\hat{\theta}$ 에 도달하게 됨을 의미한다.

이와 같은 EM 알고리즘의 특성은 다양한 응용문제에서 최우추정의 적용을 가능하게 하였다. 특히, 제약화 EM 알고리즘은 공간 종속적(spatially dependent) 자료 분석에 효율적으로 적용되고 있다. 예를 들면, Abdalla 와 Kay(1990)은 영상복원에 이를 적용하였다. 그러나 방정식 $D^{10}Q(\theta|\theta^n) - \lambda DJ(\theta) = 0$ 에서 θ 에 대한 전계가 불가능한 경우 EM 알고리즘의 사용은 극히 어렵게 된다. Meng 과 Rubin(1993)은 복잡한 M-단계 대신 계산하기 편리한 CM-단계를 대치하여 이 문제를 극복하려 하였다. 그러나 이보다 훨씬 설득력이 있는 방법으로, Lange(1995)는 $\lambda=0$ 일 때 반복식 (2.11)의 그라디언트 알고리즘은 소개하였다. 그는 EM 알고리즘의 수렴속도가 매우 느리다는 점에 착안하여, 각 M-단계에서 「뉴튼」알고리즘의 1-단계 추정치를 사용함으로써,

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{D^{20}Q(\theta^n|\theta^n)\}^{-1} D^{10}Q(\theta^n|\theta^n) \quad (2.12)$$

과 같은 알고리즘의 사용을 제안하였다. 이 EM 그라디언트 알고리즘의 장점은 첫째, M-단계에서 θ^{n+1} 을 구하기 위해 복잡한 $D^{10}Q(\theta|\theta^n) = 0$ 을 전개할 필요가 없다는 것이고, 둘째는 대부분의 문제에서 $D^{20}Q(\theta^n|\theta^n)$ 은 역행렬의 계산이 필요 없는 대각행렬이라는 것이다. 셋째 장점은 이 알고리즘은 OSL과 수렴속도가 거의 같다는 것이다.

3. EM 알고리즘을 이용한 투과형토머그래피의 영상재구성

〈표 1〉 모형에 사용되는 기호

<ul style="list-style-type: none"> • 방출형(emission)과 투과형(transmission) 공통 <ul style="list-style-type: none"> i : 투사(projection) subscription j : 픽셀 subscription I_i : i번째 투사에 기여한 픽셀들의 집합 J_j : 픽셀 j가 기여한 투사들의 집합 Δt_i : i번째 투사에 소요된 시간 • 투과형(transmission)형 모형 <ul style="list-style-type: none"> α_i : i번째 투사의 방출원 농도(source intensity) θ_j : j번째 픽셀의 감쇠계수(단위구간당 광자가 검출될 확률) l_{ij} : j번째 픽셀을 가로지르는 i번째 투사의 길이

투과형 토머그래피 영상재구성은 N 번의 투사를 통해 얻어진 $y_i = \sum_{j \in I_i} x_{ij}$, $i=1, 2, \dots, N$ 를 사용하여 크기가 p 인 횡단면 영상의 감쇠계수벡터 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^T$ 를 추정하는 것이다. 여기서 x_{ij} 는 i 번째 투사에서 j 번째 화소를 통과한 광자의 수를 나타내며 관측불능의 완전자료로 취급한다. 그런데, 우리는 i 번째 투사에 속한 화소의 집합 I_i 의 선형합(line sum) y_i 만을 불완전자료로서 간접 관측할 수 있다. 이것을 그림으로 나타내면 (그림 1), (그림 2), (그림 3)과 같다.

투과형 CT의 광자발생원은 피사체의 외부에 있으며, 픽셀 j 의 감쇠계수 θ_j 가 추정해야할 모수가 된다. 또한 각 투사 i 에 대응한 평균발생강도를 α_i 로 표시하자. α_i 는 광자발생원과 광자검출기의 기전에 의존하게 되는데, 단순히 피사체를 제거한 상태에서 경험적으로 쉽게 추정되므로 이 값은 기지로 간주하여도 무방하다.

각 투사 i 에 대해, w_i 를 광자발생기를 출발하여 검출기로 향하는 광자의 총수라 하자. 만약 감쇠가 없다면, 모든 w_i 개의 광자가 검출기에 포착될 것이다. 그리고 w_i 들은 서로 독립이다. 또한, y_i 를 실제 검출된 광자수라 하면, 이것은 관측자료를 구성한다. 한편, 무한히 얇은 광선(infinitely thin beam)을 가정한다면, 이때 발생원을 떠난 w_i 개의 광자 각각은 같은 확률,

$$\exp(-\sum_{j \in I_i} l_{ij} \theta_j) \tag{3.1}$$

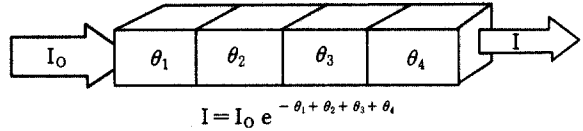
로 검출기에 도달하게 된다. 이는 곧 y_i 가

$$E(y_i) = w_i \text{의 평균} \times \text{각 광자가 검출될 확률} \\ = d_i (= \Delta t_i \alpha_i) \times \exp(-\sum_{j \in I_i} l_{ij} \theta_j)$$

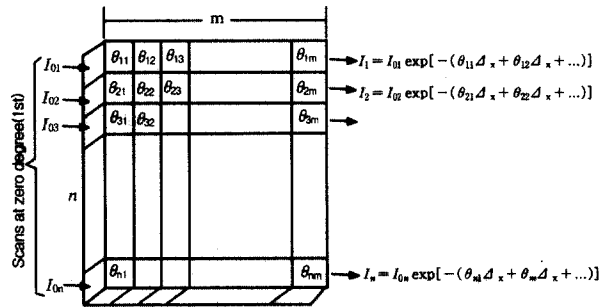
인 포아송 분포를 따른다는 것을 의미한다. w_i 들은 서로 독립이므로, y_i 들 역시 독립이다. 결국, 모든 투사에 대한 대수우도는,

$$\ln g(y, \theta) = \sum_i (-d_i \exp(-\sum_{j \in I_i} l_{ij} \theta_j) - y_i \sum_{j \in I_i} l_{ij} \theta_j + y_i \ln d_i - \ln y_i!) \tag{3.2}$$

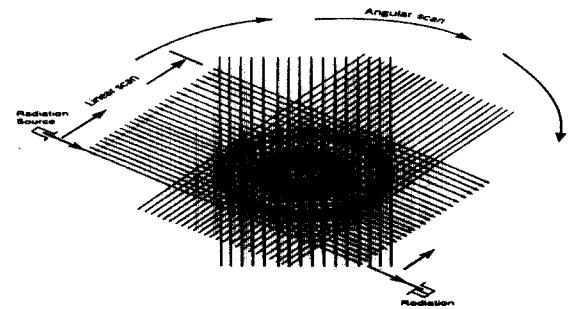
과 같이 결정된다. 여기서, y 와 θ 는 각각 y_i 들과 θ_j 들을 원소로 하는 벡터이다.



(그림 1) 단순화한 x-선 광자 I_0 가 화소를 통하여 감쇠된 광자 I 로 변환



(그림 2) 영상의 선형감쇠계수의 2차원 행렬



(그림 3) 광자를 선형과 각도를 주어서 스케닝(scanning)하는 방법

한편, $\ln g(y, \theta)$ 에 대한 완전한 오목성을 확인하기 위해 2차 편도함수를 구하면,

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \ln g(y, \theta) = \sum_i a_{ik} d_i \exp(-\sum_{j \in I_i} l_{ij} \theta_j) a_{il} \tag{3.3}$$

이다. 단, $a_{ik} = l_{ik}$, $k \in I_i$; $a_{ik} = 0$, $k \notin I_i$ 을 나타낸다. 그리고 행렬 $A = (a_{ik})$ 가 최소한 행의 수가 열의 수보다 작지 않은, 완전계수이면, 이에 대응하는 2차형식이 완전한 오목성

$$\sum_{k,l} \nu_k \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} \ln g(y, \theta) \right) \nu_l < 0$$

을 만족한다. 그리고 발생원에 가장 근접한 픽셀을 첫 번째로 하고 검출기에 가장 근접한 픽셀을 $m-1$ 번째 픽셀로 정하

면, 이 투사선에 걸쳐있지 않은 픽셀들에 대해서는 고려할 필요가 없다. 한편, 투사선을 따라 각 픽셀에 입사되는 광자수를 완전자료로 취급할 수 있다. 즉, x_j , $1 \leq j \leq m-1$,를 픽셀 j 에 입사되는 광자수라 하자. 이때, $x_1 = w$ 는 평균 $d = \Delta t a$ 로 발생원에서 방출된 광자수이다. 그리고 $x_m = y$ 는 검출기에서 관측한 광자수가 된다. 픽셀 j 를 통과한 광자수 x_{j+1} 는 오직 입사광자수 x_j 와 투사의 경로길이 및 감쇠계수의 곱인 $l_j \theta_j$ 에만 의존한다. 그렇기 때문에 통과된 광자수는 x_j 번의 독립시행 중 성공확률 $e^{-l_j \theta_j}$ 인 이항분포를 따른다. 발생원에서 검출기까지 귀납적으로 픽셀들을 더해 가는 논법에 의해 완전자료의 대수우도는,

$$\begin{aligned} \ln f(x, \theta) &= \ln [f(x_1, \theta) f(x_2 | x_1, \theta) f(x_3 | x_1, x_2, \theta) \\ &\quad \cdots f(x_m | x_{m-1}, \dots, x_1, \theta)] \\ &= \ln f(x_1, \theta) + \sum_{j=1}^{m-1} \ln f(x_{j+1} | x_j, \theta) \\ &= -d + x_1 \ln d - \ln x_1! \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ \ln \binom{x_j}{x_{j+1}} + x_{j+1} \ln(e^{-l_j \theta_j}) \right. \\ &\quad \left. + (x_j - x_{j+1}) \ln(1 - e^{-l_j \theta_j}) \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

과 같이 주어진다. E-단계를 유도하기 위해 불완전자료 x_m 와 사전추정치 θ^n 에 대한 완전자료 x_j 의 조건부기대값 $E(x_j | x_m, \theta^n)$ 을 구해야 한다. $\ln x_1!$ 과 $\ln \binom{x_j}{x_{j+1}}$ 은 M-단계에서 상수항이 된다. 그리고, $x_m = y$ 일 때와 마찬가지로, 확률변수 x_j , $1 \leq j \leq m-1$,은 평균이,

$$E(x_j) = \gamma_j = d \exp\left(-\sum_{k=1}^{j-1} l_k \theta_k\right)$$

인 포아송 분포를 따르게 된다. 더욱이 x_j 에 대한 x_m 의 조건부 기대값은 성공률은,

$$\exp\left(-\sum_{k=j}^{m-1} l_k \theta_k\right) = \frac{\gamma_m}{\gamma_j}$$

인 이항분포를 따른다. 그러므로 (X_j, X_m) 의 결합확률은,

$$p(x_j, x_m) = e^{-\gamma_j} \frac{\gamma_j^{x_j}}{x_j!} \binom{x_j}{x_m} \left(\frac{\gamma_m}{\gamma_j}\right)^{x_m} \left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma_j}\right)^{x_j - x_m}$$

이고, 조건부확률은,

$$\begin{aligned} p(x_j | x_m) &= \frac{e^{-\gamma_j} \frac{\gamma_j^{x_j}}{x_j!} \binom{x_j}{x_m} \left(\frac{\gamma_m}{\gamma_j}\right)^{x_m} \left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma_j}\right)^{x_j - x_m}}{e^{-\gamma_m} \frac{\gamma_m^{x_m}}{x_m!}} \\ &= e^{-(\gamma_j - \gamma_m)} \frac{(\gamma_j - \gamma_m)^{x_j - x_m}}{(x_j - x_m)!} \end{aligned}$$

과 같다. 다시말해서, x_m 이 주어졌을 때 $x_j - x_m$ 은 평균이 $\gamma_j - \gamma_m = E(x_j) - E(x_m)$ 인 포아송 분포를 따르게 된다. 따라서,

$$\begin{aligned} E(x_j - x_m | x_m) &= E(x_j) - E(x_m), \\ E(x_j | x_m) &= x_m + E(x_j) - E(x_m) \end{aligned} \quad (3.10)$$

가 성립한다. 그러므로, E-단계를 정확히 결정할 수 있다.

M-단계에서는 다시 투사의 침자 i 를 사용하도록 한다. 먼저 M_{ij} 와 N_{ij} 를 각각 픽셀 j 의 입사 및 출발 기대 광자수라 하자. 이 기대값들은 관측값 Y_i 와 사전추정치 θ^n 이 주어졌을 때 얻게되는 조건부 기대값이다. 그런데 $M_{ij} = E[x_{ij} | y_i, \theta^n]$ 와 $N_{ij} = E[x_{i,j+1} | y_i, \theta^n]$ 이므로 (3.9)의 대수우도를 모든 투사에 대해 합하면,

$$\begin{aligned} Q(\theta | \theta^n) &= E[f(x, \theta) | y, \theta^n] \\ &= \sum_i \sum_{j \in J_i} \{ N_{ij} \ln(e^{-l_{ij} \theta_j}) \\ &\quad + (M_{ij} - N_{ij}) \ln(1 - e^{-l_{ij} \theta_j}) \} + R \end{aligned} \quad (3.11)$$

과 같다. 여기서, R 은 감쇠계수와 무관한 상수를 나타낸다.

M-단계는 방정식 (3.11)에 θ_k 에 관하여 1차 편미분을 취하고, 이를 모든 k 에 대해 0으로 놓으면 유도된다. 이는 곧,

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_{i \in J_k} N_{ik} l_{ik} + \sum_{i \in J_k} (M_{ik} - N_{ik}) \frac{l_{ik} e^{-l_{ik} \theta_k}}{1 - e^{-l_{ik} \theta_k}} \\ &= -\sum_{i \in J_k} N_{ik} l_{ik} + \sum_{i \in J_k} (M_{ik} - N_{ik}) \frac{l_{ik}}{e^{l_{ik} \theta_k} - 1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

과 같은 초월함수를 풀어야 한다. 식 (3.12)의 정확한 해를 얻기란 불가능해 보인다. 그런데 식 (3.12)의 우변은 θ_k 에 관해 단조함수이므로 유일한 양의 해를 갖게됨을 알 수 있다.

대부분의 실용적 응용에서는 식 (3.12)의 $l_{ik} \theta_k$ 와 같은 항은 값이 매우 작다. 따라서 다음과 같은 근사치를 사용할 수 있다. 즉,

$$\frac{1}{e^s - 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} + \frac{s}{12} + O(s^3) \quad (3.13)$$

이다. 이때, $s = l_{ik} \theta_k$ 로 치환하여 사용한다. 테일러 전개식 (3.13)에서 두 번째 항만을 고려하여,

$$\theta_k^{n+1} \approx \frac{\sum_{i \in J_k} (M_{ik} - N_{ik})}{\frac{1}{2} \sum_{i \in J_k} (M_{ik} + N_{ik}) l_{ik}} \quad (3.15)$$

를 사용한다.

M-단계에서 가능한 해에 대해 평가할 때 유의 해야 할 2가지 기준이 있다. 그것은 정확도와 계산의 간편성이다. 이 두가지 기준을 기초로 우리는 식 (3.15)을 선택하였다.

이상에서 소개된 EM 알고리즘은 재구성 문제에 매우 유용한 해법을 제공한다. 이 알고리즘은 투사 측정에 영향을 미치는 대부분의 물리적 성질을 직접 규정하도록 허용하는 확률모형을 기초로 하고 있다. 유도식은 일반성을 가지는 최대우도를 기초로 하고 있으므로, 이 알고리즘은 자료로부터의 최대 가능성을 갖는 재구성 영상을 제공하고 있는 것이다. 앞에서 언급한 바와 같이 EM 토머그래피 영상재구성은 방출형과 투과형 토머그래피에 대해 적절한 통계적 모형을 적용할 경우 광자의 에너지가 약할 때 향상된 재구성 영상을 제공한다는 것이다.

4. PEMG-1 알고리즘

4.1 PEMG-1 알고리즘의 구성

PEMG(generalized EM gradient) 알고리즘에 대한 설명에 앞서 몇 가지 개념을 정리하자. y 에 대한 x 의 조건부 확률 밀도를 $k(x|y, \theta)$ 라 할 때, $y = y(x)$ 이면, MAP 추정량은,

$$f(x|\theta)p(\theta) = g(y|\theta)k(x|y, \theta)p(\theta) \tag{4.1}$$

을 최대로 한다. 여기서 식 (4.1)의 양변에 대수를 취한 후 기대값을 취하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta) = \{L(\theta) - \lambda J(\theta)\} + H(\theta|\theta^n) \tag{4.2}$$

단, $H(\theta|\theta^n) = E[\ln\{k(x|y, \theta)\}|y, \theta^n]$. 이때, 잘 알려진 관계식 $H(\theta|\theta^n) \leq H(\theta^n|\theta^n)$ 을 이용하면 $Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta)$ 을 최대로 하는 $\theta = \theta^{n+1}$ 은 제약화 대수우도를 증가시키게 됨을 쉽게 알 수 있다. 여기서, 식 (2.18)에 대한 Lange(1995)의 그라디언트 알고리즘을,

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{D^{20}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda D^2J(\theta^n)\}^{-1}\{D^{10}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda DJ(\theta^n)\} \tag{4.3}$$

과 같이 구성할 수 있을 것이다. 우리는 이 알고리즘을 PEMG 알고리즘이라 부르겠다. PEMG 알고리즘을 사용하면 함수 Q 와 J 에서 동시에 기인하는 θ 에 대한 전개상의 어려움을 피할 수 있을 것이다. 그러나 $J(\theta)$ 가 θ 의 공간 정보를 설명하는 불균일도 제약으로 주어지는 경우는 대각행렬이 아니므로, 식 (4.3)에서 항행렬(direction matrix) $D^{20}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda D^2J(\theta^n)$ 의 역행렬을 구하여야 하는 문제점을 가지고 있다. 더우기 토머그래피의 영상재구성과 같은 응용문제에서 이 항행렬의 크기는 실로 엄청나게 크므로 역행렬의 계산은 거의 불가능하다. 이 문제를 해결하기 위해 식 (4.3)에서 $D^2J(\theta^n)$ 을 다음과 같이 분해한다.

$$D^2J(\theta^n) = D^2J_D(\theta^n) + D^2J_0(\theta^n)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서, $D^2J_D(\theta^n)$ 은 $D^2J(\theta^n)$ 의 대각성

분을 원소로 하는 대각행렬이라 놓는다. 따라서, $D^2J_0(\theta^n) = D^2J(\theta^n) - D^2J_D(\theta^n)$ 이다. 또한, $D^2J_D(\theta^n)$ 가 양정치(positive definite matrices)행렬이므로,

$$x^T D^2J_D(\theta^n)x > x^T D^2J_0(\theta^n)x, \forall x \neq 0 \tag{4.4}$$

임을 발견할 수 있다. 이점에 착안하여 식 (4.3)의 변형 알고리즘을 다음과 같이 제안한다.

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{D^{20}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda D^2J_D(\theta^n)\}^{-1}\{D^{10}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda DJ(\theta^n)\} \tag{4.5}$$

이 알고리즘을 결국, 항행렬이 대각행렬이 되어 M-단계에서 발생하는 계산상의 어려움을 쉽게 해결해 준다. 우리는 이 알고리즘을 PEMG-1 알고리즘이라 하겠다.

4.2 PEMG-1 알고리즘의 수렴성질

정리 1. PEMG-1 알고리즘은

$$-r_n^T D^{20}H(\theta^n|\theta^n)r_n - \lambda r_n^T D^2J_0(\theta^n)r_n > 0 \tag{4.6}$$

이 만족되는 모든 λ 에 대해 $L_P(\theta^{n+1}) > L_P(\theta^n)$ 을 만족한다. 단, $r^n = (\theta^{n+1} - \theta^n)$.

증명. 먼저 $\Delta L_P(\theta^n) \equiv L_P(\theta^{n+1}) - L_P(\theta^n)$, $Q_P^*(\theta^n|\theta^n) \equiv Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda J_D(\theta^n)$ 라 놓자. 한편, $\theta = \theta^n$ 에서 $L_P(\theta^{n+1})$ 에 대한 테일러 2차 전개식은

$$\begin{aligned} L_P(\theta^n) &= L(\theta^n) - \lambda J(\theta^n) \\ &= -dL_P(\theta^n)^T r_n + (1/2)r_n^T D^2L_P(\theta^n)r_n \\ &\quad + O(\|r_n^T r_n\|) \end{aligned} \tag{4.7}$$

이다. 그런데 $D^{10}H(\theta^n|\theta^n) = 0$ 이므로 식 (3.1)로부터 $D^{10}Q_P(\theta^n|\theta^n) = DL_P(\theta^n)$ 임을 알 수 있다. 결국 식 (4.5)로부터

$$r_n = (\theta^{n+1} - \theta^n) = -\{D^{20}Q_P^*(\theta^n|\theta^n)\}^{-1}DL_P(\theta^n) \tag{4.8}$$

을 얻을 수 있다. 이때, 식 (4.8)의 결과를 식 (4.7)의 우변에 대입하여 정리하면,

$$\Delta L_P(\theta^n) = (1/2)r_n^T K r_n + O(\|r_n^T r_n\|)$$

의 결과를 얻게된다. 여기서 행렬 K 는

$$\begin{aligned} K &= d^2L_P(\theta^n) - 2D^{20}Q_P^*(\theta^n|\theta^n) \\ &= -D^{20}Q(\theta^n|\theta^n) + \lambda D^2J_D(\theta^n) \\ &\quad + \{-D^{20}H(\theta^n|\theta^n) - \lambda D^2J_0(\theta^n)\} \end{aligned}$$

$$\rangle -D^{20}H(\theta^n|\theta^n) - \lambda D^2 J_0(\theta^n) \rangle > 0 \quad (4.9)$$

이 만족된다. 단, 부등호 ' \rangle '은 정방행렬의 정치-관계연산자이다. 결국 조건에 의한 λ 의 범위에서 $\Delta L_P(\theta^n) > 0$ 이 성립한다.

4.3 PEMG-1 알고리즘을 이용한 투과형 토머그래피 영상재구성식

투과형 토머그래피 영상재구성 모형에서, $Q_P(\theta^n|\theta^n) = Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda J(\theta^n)$ 와 같은 형태의 페널티 함수가 초월함수로 주어지는 경우 즉, 다음과 같은 함수식에서는,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} Q_P(\theta|\theta^n) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} Q(\theta|\theta^n) - \lambda \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta) \\ &= - \sum_{i \in A_j} N_i(j+1) l_{ij} \quad (4.10) \\ &\quad + \sum_{i \in A_j} \left\{ (N_i(j) - N_i(j+1)) \frac{l_{ij}}{\exp(l_{ij}\theta_j) - 1} \right\} \\ &\quad - \lambda \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta) \end{aligned} \quad (4.10)$$

식 (4.10)의 해를 직접적으로 구할 수 없다. 또한 행렬 $\partial^2 Q(\theta|\theta^n)/\partial \theta_j^2$ 를 구하기가 어렵기 때문에 OSL 알고리즘을 사용하지도 못한다. 따라서 Lange(1995)의 EM그래디언트 알고리즘에 사전밀도함수의 추가를 고려한 PEMG 알고리즘을 사용하면 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \theta_j^{n+1} &= \theta_j^n - \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Q_P(\theta^n|\theta^n) \right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L_P(\theta^n) \right) \right]_j \\ &= \theta_j^n - \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} J(\theta^n) \right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L_P(\theta^n) \right) \right]_j, \quad j=1, \dots, P. \end{aligned} \quad (4.11)$$

여기서, $[x]_j$ 는 벡터 x 의 j 번째 성분을 나타낸다. 그런데 행렬 $\partial^2 J(\theta^n)/\partial \theta^2$ 가 θ 의 공간정보를 설명하는 불균일로 '패널티'로 주어지는 경우 $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} J(\theta^n)$ 이 비대각행렬이므로, 행렬 $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Q(\theta^n|\theta^n)$ 이 대각행렬이라도

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Q(\theta^n|\theta^n) \\ &= \text{diag} \left\{ - \sum_{i \in A_j} \frac{N_i(j+1) l_{ij}^2}{1 - \exp(-l_{ij}\theta_j)} ; j=1, \dots, P \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$\partial^2 Q(\theta^n)/\partial \theta^2 - \lambda \partial^2 J(\theta^n)/\partial \theta^2$ 가 대각행렬이 아니므로, 이것의 역행렬을 구하는 것은 거의 불가능하다. 따라서 알고리즘(4.11)은 이 문제를 해결할 수 없다. OLS 알고리즘과 EM 그래디언트 알고리즘의 대안으로 우리는 PEMG-1 알

고리즘을 제안하였다. 이것을 적용하여 전개하면,

$$\begin{aligned} \theta_j^{n+1} &= \theta_j^n - \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} J_D(\theta^n) \right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L_P(\theta^n) \right) \right]_j \\ &= \theta_j^n - \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Q_P^*(\theta^n|\theta^n) \right]_{ii}^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} L_P(\theta^n) \right]_j, \\ &= \theta_j^n - \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} L(\theta^n) - \lambda \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta^n)}{\frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} Q_P^*(\theta^n|\theta^n)}, \\ &\quad j=1, \dots, P \end{aligned} \quad (4.13)$$

이 된다. 단, 여기서 $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} J_D(\theta)$ 는 대각행렬이며, $[H]_{ii}$ 행렬 H 의 j 번째 대각요소를 나타낸다. 알고리즘(4.13)은 항행렬이 대각행렬이 되어서 M-단계에서 발생하는 계산상의 어려움을 피할수 있다. 투과형 토머그래피 모형에 알고리즘(4.13)을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta_j^{n+1} &= \theta_j^n + \frac{\sum_{i \in A_j} (N_i(j) - E[X_i(j)]) l_{ij} - \lambda \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta^n)}{\sum_{i \in A_j} N_i(j) l_{ij}^2 \left(\frac{\exp(-l_{ij}\theta_j^n)}{1 - \exp(-l_{ij}\theta_j^n)} \right)} \quad (4.14) \\ &= \theta_j^n + \theta_j^n \frac{\sum_{i \in A_j} (E(Y_i) - Y_i) l_{ij} - \lambda D J(\theta^n)_j}{\sum_{i \in A_j} (N_i(j) l_{ij}) \left(\frac{l_{ij}\theta_j^n}{\exp(l_{ij}\theta_j^n) - 1} \right)}, \\ &\quad j=1, \dots, P \end{aligned} \quad (4.15)$$

여기서, $N_i(j) - E[x_i(j)] = y_i - E(y_i)$ 이다.

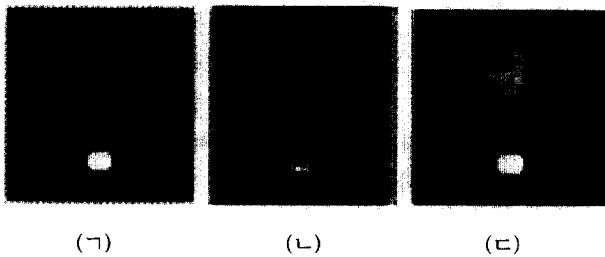
5. 영상재구성 시뮬레이션

본 논문에서는 크기 60×60 인 몸체, 식도, 등뼈, 심장, 폐 등이 포함된 인체의 단층 영상을 형상화한 팬텀(phantom)을 사용하여 EM 및 PEMG-1 알고리즘을 사용한 투과형 토머그래피 재구성 영상을 비교하고자 한다. 이 팬텀을 중심으로 0도에서 179도까지 1도씩 회전하고, 또 주어진 사영각도에서 10 mm 씩 수평이동한 위치에서 모의투사하여 y_j 를 관측하였다. 그리고, 페널티 함수는 다음과 같이 정의한다.

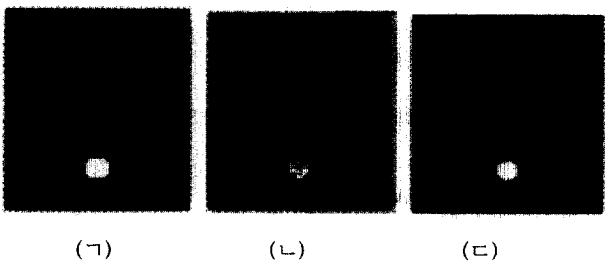
$$J(\theta|\theta^n) = \sum J_j(\theta_j|\theta^n) = \sum \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{N}_j} c_{jk} d(\theta_j - \theta_k^n) \quad (5.1)$$

여기서 \mathcal{N}_j 는 j 번째 픽셀의 근린(neighborhoods)을 포함하는 집합인데, j 번째 픽셀의 상하좌우 그리고, 대각 픽셀을 원소로 하는 집합으로 정의하겠다. 그리고 c_{jk} 는 상하좌우 픽셀에 대해서는 1, 대각 픽셀에 대해서는 $\sqrt{2}$ 를 나타내는 값이다. 함수 $d(\cdot)$ 의 선택은 첫째 완전 오목함수라야 하며, 둘째로 $|d(\cdot)| < \infty$ 를 만족해야 하며, 그것은 알고리즘의 유일해로의 수렴과 윤곽선이 보존(edge preserving)

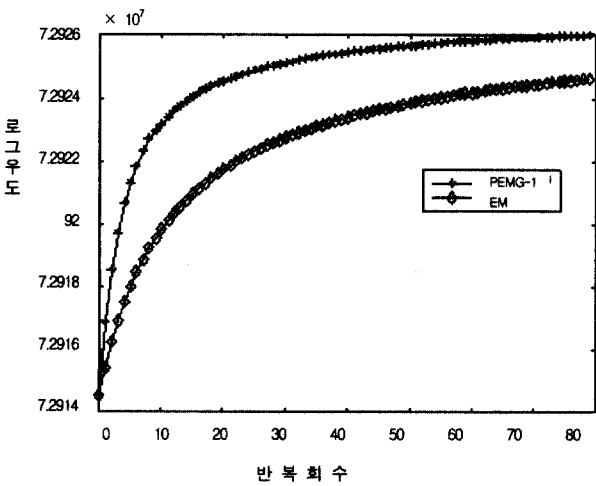
되는 평활을 위해 반드시 필요하다. 이 성질들을 만족하는 함수들은 많이 있으나 본문에서는 전술한 두가지 조건을 만족하는 Green(1990)의 $\log \cosh(\cdot)$ 함수를 사용하겠다. 여기서는 4 종류의 토모그래피에 대해 모의실험을 하였는데, 평균 입사 광자수가 500인 경우(실험 A), 350인 경우(실험 B), 250인 경우(실험 C) 그리고 100인 경우(실험 D)이다. 실험 D는 투사 에너지가 비교적 약한 저준위 조사량인 경우이고, 실험 A는 강한 투사 에너지를 나타내는 전형적인 투과형 기기를 모델링한 것이다. 한편, EM 및 PEMG-1 알고리즘의 초기치 θ^0 는 CBP 재구성 이미지의 음수 값들을 0으로 대체하여 사용하였다.



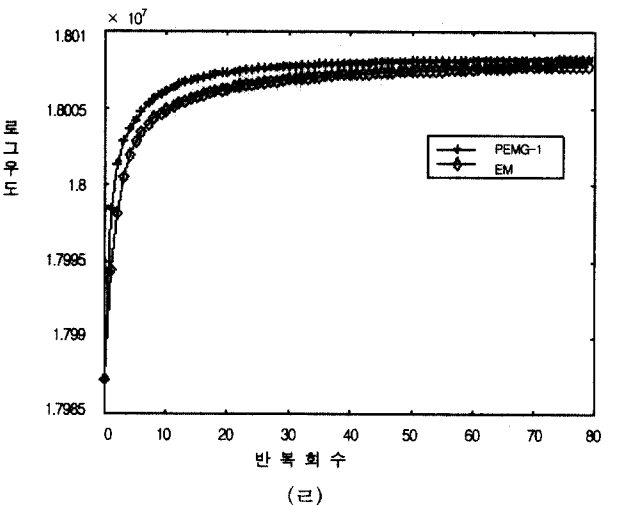
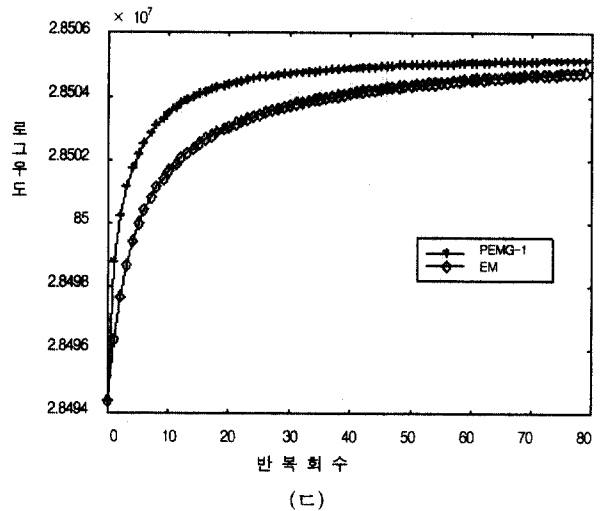
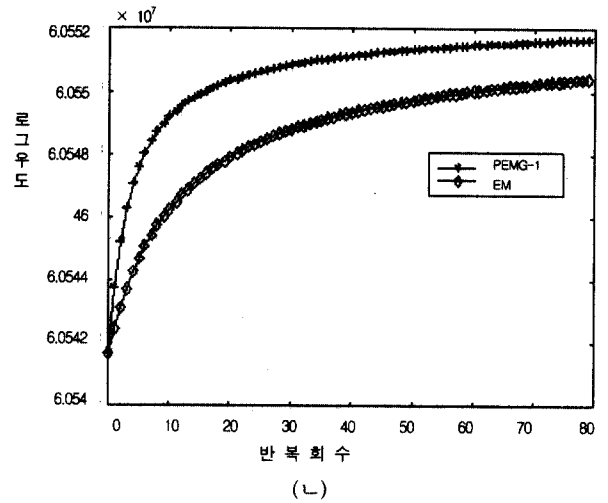
(그림 4) 실험 D인 경우의 EM 및 PEMG-1 알고리즘을 이용한 영상재구성 모의실험 (왼쪽으로부터 원래영상, EM, PEMG-1일 때의 재구성 영상)



(그림 5) 실험 A인 경우의 EM 및 PEMG-1 알고리즘을 이용한 영상재구성 모의실험 (왼쪽으로부터 원래영상, EM, PEMG-1일 때의 재구성 영상)



(가)



(그림 6) (가)은 실험 D(평균입사 광자의 세기 100), (나)은 실험 C(평균입사 광자수 250), (다)은 실험 B(평균입사 광자수 350) 그리고 (라)은 실험 A(평균입사 광자수 500)에서 각각의 EM 및 PEMG-1 알고리즘을 사용한 페널티 로그우도의 수렴률을 나타내고 있음

(그림 7),(그림 8),(그림 9),(그림 10)에서 나타 나듯이 평균입사 광자수의 세기에 관계없이 PEMG-1 알고리즘이 EM 알고리즘보다 모든 경우에서 페널티 로그우도를 증가시키는 수렴률이 빠르다는 것을 알 수 있다.

〈표 2〉 감쇠계수 추정치의 비교(감쇠계수 추정치의 부위별 평균 및 표준편차)

구 분	부 위 별 이 름		등 배	허 과	심 장	몸 체
	실제 감쇠계수					
실험 A	PEMG-1	평균	0.1573	0.0075	0.0590	0.0421
		표준편차	0.1702	0.1214	0.3542	0.0483
	EM	평균	0.1579	0.0078	0.0632	0.0428
		표준편차	0.1743	0.1324	0.3743	0.0543
실험 B	PEMG-1	평균	0.1572	0.0074	0.0598	0.0432
		표준편차	0.1732	0.1231	0.3543	0.0421
	EM	평균	0.1577	0.0079	0.0592	0.0451
		표준편차	0.1821	0.1332	0.3541	0.0477
실험 C	PEMG-1	평균	0.1564	0.0071	0.0598	0.0411
		표준편차	0.1724	0.1224	0.3574	0.0414
	EM	평균	0.1570	0.0073	0.0599	0.0434
		표준편차	0.1751	0.1321	0.3743	0.0457
실험 D	PEMG-1	평균	0.1552	0.0069	0.0561	0.0431
		표준편차	0.1710	0.1300	0.3721	0.0468
	EM	평균	0.1561	0.0072	0.0578	0.0489
		표준편차	0.1728	0.1354	0.3789	0.0487

6. 결 론

본 논문에서는 전통적인 EM 알고리즘이 가지는 문제점인 느린 수렴속도 문제를 해결하기 위하여 PEMG 알고리즘을 변형한 PEMG-1 알고리즘을 제안하였는데, 제안된 PEMG-1 알고리즘을 이용하여 투과형 토머그래피의 영상재구성 모의실험 결과 평균입사 광자수에 관계없이 PEMG-1 알고리즘이 사용한 재구성 영상이 EM 알고리즘 보다 양질의 재구성 영상을 나타냄을 확인하였다(그림 4) 및 (그림 5) 참조). 특히 비교적 약한 평균입사 광자수 일 때 즉, 투사 에너지가 비교적 약한 저준위 조사량인 경우일 때 PEMG-1 알고리즘 사용한 재구성 영상이 더욱 실효성이 있음을 보여주고 있다(그림 4) 참조).

한편, 알고리즘의 수렴률은 위에서 제시한 4가지 모두 PEMG-1 알고리즘이 효율적임을 알 수 있었다(그림 6) 참조). 그리고 부위별 감쇠계수 평균 추정치의 비교에서도 PEMG-1 알고리즘이 EM 알고리즘을 사용한 방법보다 비교적 정확하게 추정됨을 확인할 수 있었고, 표준편차도 적게 나타남을 확인할 수 있었다(〈표 2〉 참조) 따라서 제안된 PEMG-1 알고리즘이 투사에너지 강도의 세기에 관계없이 보다 양질의 재구성 영상을 제공하였고 수렴속도도 향상됨을 확인할 수 있었다. 토머그래피 영상재구성에서 수렴속도의 향상은 그것의 실효성에서 매우 큰 의미를 부여 할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Boyles, R. A., "On the convergence of the EM algorithm," Journal of Royal Stat. Soc. Series B Vol.45, pp.47-50, 1983.
- [2] Cho Z. W, John J. P. & Singh M., "Foundation of Medical Imaging," John Wiley & Sons, 1993.
- [3] Dempster A. P, Laird N. M & Rubin D. B., "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm," Journal of Royal Stat. Soc. Series B, Vol.39, pp.1-38, 1977.
- [4] De Pierro, A. R., "On the relation between the ISRA and the EM algorithm for positron emission tomography," IEEE Tr. Image Processing, Vol.12, No.2, pp.328-333, 1993.
- [5] Fessler, J. A & Hero A. O., "Penalized maximum-likelihood image reconstruction using space-alternating generalized EM algorithm," IEEE Tr. Image Processing, Vol.4, No.10, pp.1417-1429, 1994.
- [6] Fessler, J. A & Hero A. O., "Space-Alternating generalized expectation maximization algorithm," IEEE Tr. Signal Processing, Vol.42, No.10, pp.2664-2677, 1994.
- [7] Green, P. J., "On use of the EM algorithm for penalized likelihood estimation," Journal of Royal Stat. Soc. Series B, Vol. 52, pp.443-452, 1990a.
- [8] Green, P. J., "Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified EM algorithm," IEEE Tr. Medical Imaging, Vol.9, No.1, pp.84-93, 1990b.
- [9] Hoffman, E. J., Phelps, M. E., Huang, S. C., "A new tomograph for quantitative positron emission computed tomography of the brain," IEEE Trans Nucl. Sci., Vol.28, pp.99-103, 1981.
- [10] Lange, K. S., & J. A., Fessler, "Globally convergence algorithm for maximum a posteriori transmission tomography," IEEE Tr. Image Processing, Vol.4, No.10, pp.1430-1438, 1995.
- [11] Lange, K. S., "Convergence of EM Image reconstruction Algorithm with Gibbs Smoothing," IEEE Tr. Medical Imaging, Vol. 9, No.4, pp.439-446, 1990.
- [12] Lange, K. S., "A Gradient Algorithm Locally Equivalent to the EM Algorithm," Journal of Royal Stat. Soc. Series B, Vol.57, pp.425-437, 1995.
- [13] Lange, K. S., & R. Carson, "EM Reconstruction Algorithm for Emission and Transmission Tomography, J. of Computer Assisted Tomography," 8(2), pp.306-316, 1984.
- [14] Lange, K. M., Bahn, R. L., "A theoretical study of some maximum likelihood algorithm for emission and transmission tomography," IEEE Tr. Medical Imaging, Vol.6, pp.106-114, 1987.
- [15] Shepp, L. A., Logan, B. F., "The Fourier reconstruction of a head section," IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol.21, pp.21-43, 1974.
- [16] Wu, C. F., "On the convergence properties of the EM algorithm," Ann. Stat., Vol.11, pp.95-103, 1983.



송민구

e-mail : mk.song@ncr.com

1998년 동국대학교 통계학과(이학박사)

1994년~1999년 동국대학교 통계학과,
컴퓨터정보통신학부 강사역임

1999년~2000년 (주)마이닝 테크 이사

2000년~현재 한국 NCR 데이터 마이닝팀
팀장

관심분야 : 통계적 영상처리, 영상재구성, 데이터 마이닝 등

박정기

e-mail : park@hanyang.ac.kr

2000년 동국대 일반대학원 통계학과(이학박사)

1981년~현재 한양대학교 전기전자공학부 교수

관심분야 : 신뢰성 이론, 영상처리 및 토머그래피 영상재구성 등