수치등각사상의 자동화 알고리즘에 관한 연구

송 은 지†

요 약

단위원의 내부로부터 Jordan 영역으로의 등각사상을 구하는 것은 일반적으로 비선형방정식인 Theodorsen 방정식을 푸는 것으로 귀결된다. 저자는 이 비선형 방정식의 수치적 해법 중 가장 효율적인 방법으로 알려진 Wegmann의 해법에 저주파 필터를 적용하여 개선하고 새로운 산법의 수렴성을 이론적으로 증명한 바 있다[1, 2]. 또한 이 해법에 있어 참값을 모르더라도 오차평가가 가능한 방법을 제안하였다[3].

본 논문에서는 참값을 모르더라도 오차평가가 가능한 연구결과를 이용하여 주어진 문제영역과 허용오차에 따라 자동으로 수치등각사상이 결정되는 알고리즘을 제안한다. 이 알고리즘에서는 지금까지 경험에 의존했었던 표본수와 저주파 필터 파라메터가 주어진 문제영역에 따라 자동으로 결정된다. 이것은 문제의 난이도가 문제영역의 변형에 의존한다는 전제로 문제영역의 모양을 결정하는 함수를 Fourier 급수로 전개, 분석하여 얻을 수 있다. 수치실험을 통해 그 유효성을 입증한다.

키워드 : 수치등각사상, Wegmann 방법, 저주파 필터, Fourier 변환, 자동화 알고리즘

A study on the Automatic Algorithm for Numerical Conformal Mapping

Eun Jee Song†

ABSTRACT

The determination of the conformal maps from the unit disk onto a Jordan region has been completed by solving the Theodorsen equation which is an nonlinear equation for the boundary correspondence function. Wegmann's method has been well known for the efficient method among the many suggestions for the Theodorsen equation. We proposed an improved method for convergence by applying a low-frequency pass filter to the Wegmann's method and theoretically proved convergence of improved iteration[1, 2]. And we proposed an effective method which makes it possible to estimate an error even if the real value is not acquired[3].

In this paper, we propose an automatic algorithm for numerical conformal mapping based on this error analysis in our early study. By this algorithm numerical conformal mapping is determined automatically according to the given domain of problem and the required accuracy. The discrete numbers and parameters of the low-frequency filter were acquired only by experience. This algorithm, however, is able to determine the discrete numbers and parameters of the low-frequency filter automatically in accordance with the given region. This results from analyzing the function, which may decide the shape of the given domain under the assumption that the degree of the problem depends of the transformation of a given domain, as seen in the Fourier Transform. This proposed algorithm is also proved by numerical experience.

Key Words : Numerical Conformal Mapping, Wegmann's Method, Low Frequency Filter, Fourier Transform, Automatic Algorithm

1. 서 론

일반적으로 등각사상을 구하는 것은 수치적 해법에 의해서만 가능하다. 수치등각사상을 구하는 효율적인 해법이란 보다 경제적이고 보다 정확하며 보다 실용적인 알고리즘을 말한다. 여기서는 단위원에서 Jordan 영역에로의 수치등각사상을 구하는 해법을 다루는데 이것은 Theodorsen 방정식이라하는 비선형 방정식을 푸는 문제로 귀결된다[4]. 이 비선형 방정식을 푸는 여러 가지 해법 중 독일의 Wegmann 박사가 제안한 해법이 가장 효율적인 방법이라 알려져 있다. Wegmann이 제안한 해법은 Newton법으로 속도가 빠르고 Reimann-Hilbert문제로 해석하여 기억용량과 반복 횟수를 대폭 절약한 면에서 매우 효율적인 알고리즘이다[5].

저자는 이 해법의 문제점을 분석하여 저주파필터에 의해 수렴성을 대폭 개선한 방법을 제안한 하였고 새로운 산법에 있어 참값을 모르더라도 오차평가가 가능한 방법을 제시하고 수치실험으로 그 유효성을 입증한 바 있다[1, 3].

본 논문에서는 저주파필터를 적용한 Wegmann해법에 있어 참값을 모르더라도 오차평가가 가능한 연구결과를 이용하여 주어진 문제영역과 허용오차에 따라 자동으로 수치등각사상을 구할 수 있는 알고리즘을 제안한다. 이것은 지금

※ 본 논문은 2006년 남서울대학교 교내과제 연구비에 의해 수행되었음.
† 종신회원 : 남서울대학교 컴퓨터학과 부교수
논문접수 : 2006년 6월 26일, 심사완료 : 2006년 12월 16일

까지 경험에 의해 결정 하였던 저주파필터의 파라메터와 표본수가 문제영역을 나타내는 함수의 Fourier 급수 전개에 의해 분석하여 얻을 수 있다는 특징이 있다.

일반적인 수치해법에 있어 이산화를 위한 표본수의 결정은 주로 경험에 의해 행해지고 있으므로 주어진 문제의 난이도에 따라 필요한 표본수가 자동으로 결정되는 본 연구의 결과는 정보처리분야에 있어 그 의의가 크다고 사료된다.

2. 반복법

Φ 는 다음의 정규화 조건

$$\Phi(0)=0,\ \Phi'(0)>0 \tag{1}$$

를 만족하는 단위원에서 Jordan영역에로의 등각사상이라 하자. 그리고 Jordan 폐곡선을 Γ라 하고 $\Gamma := \{ \eta(s) : s\in[0,2\pi)\}$로 정의하면 Γ 상에서

$$\Phi(e^{it})=\eta(s(t)),\ s(t)-t\in C_R(T) \tag{2}$$
$$(C_R(T) : \text{주기 } 2\pi \text{ 실수 연속함수})$$

로 표현 가능하다. 등각사상 Φ는 단위원 내부에서 해석적(Analytic)이고 원주에서 연속적이기 때문에 원주상에서 계산되면 내부에서도 계산할 수 있다. 따라서 Φ를 구하는 문제는 (2)식의 $s(t)$ (이하 s)를 구하는 것으로 문제가 귀결된다. 구하고자 하는 s는

$$\Psi(s) := Im\eta(s)-KRe\eta(s)=0 \tag{3}$$
$$(Im\eta(s) : \eta(s)\text{의 허수부},\ Re\eta(s) : \eta(s)\text{의 실수부})$$

인 Theodorsen 방정식이라 불리 우는 비선형 방정식으로부터 구할 수 있다[4].

(3)식은 s_o을 초기치로 하여 다음의 Newton 반복법

$$\Psi(s_k)+\Psi_{s_k}\delta_k=0 \tag{4}$$
$$s_{k+1}=s_k+\delta_k,\ k\ge 0$$

에 의해 구한다. 이것을 컴퓨터상에 실현시키기 위해 먼저 이산화를 하는데 특히 여기서는 (3)식에 나타나있는 공역작용소 K의 이산화가 중요한 요소가 된다. 이산화에 있어 편이상 짝수 표본수 $N=2n$를 사용하여

$t_\nu=2\pi\nu/N$, $\nu=0,1,2\cdots,N-1$로 한다. 공역작용소 K의 이산화와 (4) 식의 근사값 s_{k+1} 구하는 해법으로서 저주파필터를 적용한 반복법을 사용하며 구체적인 것은 논문1에 서술되어 있으므로 여기서는 생략한다.

Wegmann이 제안한 해법의 근사치가 s_{k+1} 라 하면 개선한 해법의 근사치를

$$s^*_{k+1} := L_l(s_{k+1}-t)+t \tag{5}$$

로서 구한다. (5) 식의 저주파필터 L_l은 다음과 같다.

$$L_l(e^{imt})=\begin{cases} e^{imt} & : 0\le|m|\le n-l \\ 0 & : n-l<|m|\le n \end{cases} \tag{6}$$

여기서 l은 뒤에서 몇 개의 고주파성분을 제거할 것인가를 정하는 필터 파라메터이다.

3. 저주파필터와 오차평가

(6)식 저주파필터의 파라메터 l은 다음과 같이 결정한다. 주어진 문제영역의 경계가

$$\eta(t)=(1+\xi(t))e^{it} \tag{7}$$

로 표현되는 영역으로 하고 ξ와 $\dot{\xi}$가

$$\xi(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{i\nu t},$$
$$\dot{\xi}(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu e^{i\nu t}=\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu c_\nu e^{i\nu t} \tag{8}$$

로 Fourier 급수 전개된다고 하자. ξ와 $\dot{\xi}$의 Fourier계수로부터 다음과 같이 D_0와 D_l를 정의한다.

$$D_0 := |c_0|+4\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|,$$
$$D_l := 2|d_l|+4\sum_{k=l+1}^{\infty}|d_k|,\quad 1\le l\le\infty \tag{9}$$

논문 2에 의하면 저주파 필터 파라메터 l를 (9)의 D_l $(l=0,1,\cdots)$가

1 미만이 되도록 결정하면 반복법은 수렴한다. l을 결정하는 구체적인 산법은 다음과 같다.

표본수 $N=2n$에 대해 FFT(Fast Fourier Transform)로서 (8)식 $\xi(t)$의 이산형 Fourier급수로 전개하여

$\dot{\xi}(t)$의 Fourier 계수 $d_\nu=\nu c_\nu$를 구한다. 근사계수 d_ν의 오차가 충분히 작아지도록 표본수 N을 2배씩 증가시킨다. 이 작업을 위해서는 Fourier계수 중 마지막 2개의 계수가 허용오차 ϵ에 대하여

$|d_N|+|d_{N-1}|<\epsilon$ 이 되도록 N을 결정한다. 반복법은 노름 $\|\xi\|$ 가 작다는 가정 하에 그 수렴성이 증명되어 있으므로 D_l 가 1보다 훨씬 작도록 l을 결정하여야 한다.

구체적인 알고리즘에서는 $D_l<10^{-2}$로 하였다. 여기서 주목할 점은 저주파필터 파라메터 l 은 문제영역의 모양을 결정하는 함수 $\xi(t)$에만 의존하며 표본수 N에는 의존하지 않는 다는 것이다.

이것은 문제영역의 모양이 난이도를 결정하므로 l에 의해 난이도를 알 수 있으며 표본수를 증가 시킬 때에도 변하지 않는다는 것을 의미한다.

오차평가는 참값을 모르더라도 다음과 같이 할 수 있다 [3, 6] .

s_{k+1}를 반복법에 의한 근사 값이라 하고 s를 참값이라고 하면

$$\|s_{k+1} - s\| \le C_m \|\eta(s_{k+1}(t)) - \Phi_{k+1}(e^{it})\| \qquad (10)$$

를 만족하는 C_m이 존재한다. 따라서 참값 s를 모르더라도 (10)식의 좌변의 실제오차 대신에 우변의 추정오차에 의해 오차평가가 가능하다.

4. 자동화 알고리즘

지금까지 경험에 의존했던 저주파필터의 파라메터와 표본수의 결정을 문제영역을 나타내는 함수의 Fourier급수전개에 의해 자동으로 결정할 수 있다는 점과 참값을 모르더라도 오차평가가 가능하다는 연구결과[3]를 이용하여 주어진 문제영역과 허용오차에 따라 등각사상 Φ을 자동으로 구하는 알고리즘을 제안 한다 .

일반적으로 표본수(discrete number)를 증가시킴에 따라 보다 참값에 가까운 근사 값을 구할 수 있는데 반복법에서 초기표본수로부터 표본수를 증가시켜야 하는지 여부를 오차평가에 의해 결정한다.

구체적인 자동화알고리즘은 다음과 같다.

1. 저주파필터 파라메터 결정단계

1) (8)식에서 ξ 의 Fourier 계수를 이산형 Fourier급수 전개에 의해 구한다.

2) $\dot{\xi}$의 Fourier계수를 이용하여 (9)식으로부터 $D_l < 10^{-2}$가 되도록 저주파필터 파라메터 l을 결정한다.

2. 초기화 단계

1) 초기 표본수 N은 1단계에서 요구되어진 계수의 항수로 한다.

2) 적당한 초기치 s_0를 정한다

3) 요구정도 ε을 정한다.

3. 반복법

수정량이 허용오차 ε보다 작아질 때까지 반복법을 시행한다.

4. 오차평가 단계

3단계에서 구한 근사 값의 오차를 (10)식의 우변에 의해 추정오차 식에 의해 구한다. 이 추정오차가 주어진 허용오차 ϵ보다 작으면 참값 s의 근사 값을 s_{k+1}로 하여 반복법을 종료한다.

추정오차가 ε 보다 크면 다음단계로 넘어간다.

5. 표본수 증가와 초기치 결정 단계

1) 표본수를 2배로 한다. 즉, N을 $2N$으로 한다.

2) 4단계에서 구한 근사값s_{k+1} 을 $2N$에서 표본화하여 그것을 초기치로 하고 3단계로 간다.

이 알고리즘의 특징은 다음과 같다.

1. 주어진 문제영역의 경계함수를 이용하여 저주파필터의 파라메터와 초기표본수가 자동으로 결정된다.
2. 저주파필터의 크기에 따라 문제의 난이도를 예측할 수 있다.
3. 이전 단계의 반복법에서 얻은 근사값을 다음 단계의 초기치로 이용함에 따라 보다 경제적으로 보다 정확한 근사값을 구할 수 있다.
4. 참값을 모르더라도 오차평가가 가능하여 허용오차를 만족할 수 있는 표본수 N이 자동으로 결정된다.

5. 수치실험

수치실험 예로서는 참값이 알려져 있는 편심원을 다루었다. 실험결과에 사용한 기호는 다음과 같은 의미를 갖고 있다.

$$ER := \max_{\nu=0,1,\cdots,N-1} |s(t_\nu) - s_{k+1}(t_\nu)|$$
$$E := \max_{\nu=0,1,\cdots,N-1} |\eta(s_{k+1}(t_\nu)) - \Phi_{k+1}(e^{it_\nu})|$$
$$t_\nu = 2\pi\nu/N$$

즉, ER은 참값과 근사값과의 차인 실제오차이며 E는 참값을 모르더라도 오차를 추정할 수 있는 추정 오차이다. 편심원은 다음과 같은 경계함수를 갖는다.

경계: $\eta(s) = \rho(s)\, e^{is}$

$$\rho(s) = \frac{R\cos s + \sqrt{1 - R^2 \sin^2 s}}{R+1}, \quad 0 \le R < 1$$

해 : $s(t) = \arctan \dfrac{R\sin t}{1 - R\cos t} + t$

이 영역은 형상 파라메터 R이 1을 향해 커질수록 변형이 심해져서 문제가 어려워지는 예이다.

$R = 0.6$일 경우 <표 1>에 나타난 것처럼 초기 표본수가 $N = 64$로 정해지고 허용오차에 따라 $N = 128$로 자동으로 증가하여 단 1회 반복으로 허용오차를 만족하는 근사 값을 구할 수 있음을 보인다. 문제의 난이도가 높은 $N = 0.9$일 경

〈표 1〉 R=0.6일 때 자동화알고리즘에 의한 반복법 결과

R=0.6	N = 64	
k	ER	E
1	0.649E+00	0.185E+00
2	0.251E-01	0.240E-01
3	0.365E-03	0.444E-03
4	0.110E-05	0.492E-05
5	0.427E-07	0.191E-06
6	0.944E-08	0.108E-07
	N = 128	
1	0.323E-14	0.402E-13

〈표 2〉 R=0.9일 때 자동화알고리즘에 의한 반복법 결과

R=0.9	N = 256	
k	ER	E
1	0.809E+00	0.682E+00
2	0.426E+00	0.379E+00
3	0.141E+00	0.139E+00
4	0.111E-01	0.109E-01
5	0.101E-03	0.158E-03
6	0.285E-05	0.734E-05
7	0.210E-06	0.544E-05
8	0.896E-07	0.208E-06
9	0.836E-07	0.204E-06
	N = 512	
1	0.246E-09	0.158E-09
2	0.252E-10	0.163E-10
	N=1024	
1	0.275E-12	0.814E-14

우도 <표 2>에서와 같이 초기 표본수가 $N=128$로 정해지고 허용오차에 따라 표본수가 자동으로 증가하여 $N=1024$일 때 만족할 만한 근사 값을 구할 수 있음을 보인다. 특히, 표본수를 증가시켜 반복법을 시행 시 초기치로서 이전 표본수에서 얻은 근사치를 이용함에 따라 반복횟수가 대폭 감소했음을 알 수 있다.

6. 결 론

수학적 모델을 컴퓨터 상에 실현시킬 때 효율적인 알고리즘을 연구하고 개발하는 것이 수치해석학의 궁극적인 목표이다. 일반적으로 수학적 이론의 결과와 컴퓨터상의 계산결과는 정확하게 같지 않으며 효율적인 알고리즘을 위해서는 이 둘의 차이인 오차를 줄이려는 연구가 필요하다.

수치등각사상을 구하는 해법 중에서 저주파필터를 적용한 Wegmann 반복법의 오차평가에 있어 몇 가지 수학적 이론을 근거로 참값을 모르더라도 참값과 근사 값의 차이를 추정할 수 있는 추정오차를 제안한 바 있다[3]. 본 연구에서는 이 추정오차를 이용하여 해법의 자동화알고리즘을 제안하였다. 이것은 일반적으로 오차를 줄이기 위해 표본수를 증가시키는데 추정오차가 허용오차를 만족하느냐 여부를 시스템 내부에서 측정할 수 있기 때문에 가능하다. 여기에서 제안한 알고리즘은 문제 영역의 경계를 표현하는 함수를 Fourier 급수 전개하여 얻은 Fourier계수에 의해 주어진 문제와 허용오차에 따라 초기 표본수와 저주파필터의 파라메터가 자동으로 결정된다는 특징이 있다. 또한 표본수를 증가시킬 때 반복법의 초기치로서 이전 표본수에서 얻은 근사치를 이용함으로서 반복횟수를 대폭 감소시킬 수 있다는 연구결과도 괄목할 만한 성과이다.

이 자동화 알고리즘에서는 표본수를 2배로 증가시켜 반복법을 시행하고 있으나 향후 표본수를 보다 효율적으로 증가시켜 나가도록 하는 연구가 필요하다고 사료된다.

정보처리분야의 수치해법에서 보다 정확한 해를 구하기 위해 표본수를 증가시키는데 일반적으로 필요한 표본수를 경험에 의해 결정한다. 본 논문에서 제시한 알고리즘은 문제의 난이도에 따라 필요한 표본수가 자동으로 결정되므로 일반적인 수치해법의 효율적인 이산화방법에 응용될 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 송은지, "저주파 필터를 이용한 Wegmann방법의 개량에 관한 연구",한국정보처리학회 논문집 제8-A권 제4호, pp.503-508, 2001.

[2] 송은지, "저주파 필터를 이용한 Wegmann방법의 수렴성에 관한 연구", 한국정보처리학회 논문집 제11-A권 제2호, pp.203-206, 2004.

[3] 송은지, "저주파 필터를 적용한 Wegmann방법의 오차평가에 관한 연구", 한국정보처리학회 논문집 제12-A권 제2호, pp.103-108, 2005.

[4] Gutknecht, M.H. "Numerical conformal Mapping Methods Based on FunctionConjugation." J. Comput. Appl. Math. 14, No.1,2, pp.31-77, 1986.

[5] Wegmann R. "Discretized versions of Newton type iterative methods for conformal mapping." J. Comput. Appl. Math. 29, No.2, pp.207-224 ,1990.

[6] Wegmann R. "Convergence proofs and error estimates for an iterative method for conformal mappig", Numer. Math. 44, pp.435-461, 1984.

[7] 송은지, "등각사상에 있어 Theodorsen방정식의 고속해법", 한국정보처리학회 논문집 제5권 제2호, pp.372-379, 1998.

[8] 송은지, "Hübner 방법에 기초한 수치등각사상의 자동화 알고리즘", 한국정보처리학회 논문집 제6권 제10호, pp.2716-2722, 1999.

[9] 김휘 외 3인, "회절광학소자의 최적 설계를 위한 Iterative Fourier Transform Algorithm의 수렴성에 관한 연구", 한국전자공학회 논문지-SD 제40권 제5호, pp.14-27, 2003.

[10] Barnett N.S. 외 2인 , "Error Estimates for Approximating the Fourier Transform of Functions of Bounded Variation", 한국산업정보응용수학회 논문지 제8권 제1호, pp.31-34, 2004.

송 은 지

e-mail : sej@nsu.ac.kr

1984년 숙명여자대학교 수학과(이학사)

1988년 일본 나고야(名古屋)국립대학 정보공학과(공학석사)

1991년 일본 나고야(名古屋)국립대학 정보공학과(공학박사)

1991년~1992년 일본 나고야(名古屋)국립대학 정보공학과 객원연구원

1993년~1995년 연세대학교 전자계산학과 시간강사

1993년~1995년 상지대학교 병설 전문대학 전자계산학과 전임강사

1996년~현재 남서울대학교 컴퓨터학과 부교수

관심분야 : 수치해석, 암호론, 디지털콘텐츠 ,컴퓨터 그래픽스 등