상호연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 이분할 에지수와 고장지름 분석

김 종 석[†] · 이 형 옥[††]

요 약

최근에 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 하이퍼-스타 연결망 $HS(m,k)$이 제안되었다. 본 논문에서는 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 이분할 에지수가 최대 $\binom{2n-2}{n-1}$임을 보이고, 병렬경로 집합을 이용하여 k-광역지름이 $dist(u,v)+4$이하이고, $HS(2n,n)$의 고장지름이 $D(HS(2n,n))+2$ 이하임을 보인다. $dist(u,v)$는 임의의 두 노드 u와 v 사이의 최단 거리를 나타내고, $D(HS(2n,n))$는 $HS(2n,n)$의 지름을 나타낸다.

키워드 : 상호연결망, 하이퍼-스타, 고장지름, 이분할 에지수

Analysis of Bisection width and Fault Diameter for Hyper-Star Network $HS(2n,n)$

Kim Jongseok[†] · Lee Hyeongok[††]

ABSTRACT

Recently, Hyper-Star network $HS(m,k)$ which improves the network cost of hypercube has been proposed. In this paper, we show that the bisection width of regular Hyper-Star network $HS(2n,n)$ is maximum $\binom{2n-2}{n-1}$. Using the concept of container, we also show that k-wide diameter of $HS(2n,n)$ is less than $dist(u,v)+4$, and the fault diameter is less than $D(HS(2n,n))+2$, where $dist(u,v)$ is the shortest path length between any two nodes u and v in $HS(2n,n)$, and $D(HS(2n,n))$ is its diameter.

Key Words : Interconnection Network, Hyper-star, Fault Diameter, Bisection Width

1. 서 론

상호 연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프로 표현할 수 있다. 지금까지 제안된 상호연결망은 노드 개수를 기준으로 분류하면 $k \times n$으로 표현되는 메쉬, 2^n으로 표현되는 하이퍼큐브(hypercube), $n!$로 표현되는 스타(star) 그래프 부류로 나눌 수 있다. 상호 연결망을 평가하는 척도로는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 대칭성(symmetric), 지름(diameter), 고장지름(fault diameter), 이분할 에지수(bisection width) 등이 있다[1, 8, 10].

최근에 새로운 상호연결망 하이퍼-스타[7, 13]가 제안되었다. 하이퍼-스타 연결망은 차원이 증가함에 따라 노드 개수가 조합(combination) 형태로 증가하는 새로운 형태의 상호연결망이다. 하이퍼-스타는 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용이 우수하고, 차원이 증가할 때 노드개수가 급격하게 증가하는 스타 그래프의 단점을 개선한 연결망이다.

본 논문에서는 먼저 정규연결망 $HS(2n,n)$의 이분할 에지수를 구한다. 연결망을 노드 개수가 같은 두 부분으로 나누기 위해 제거해야 할 에지의 최소 개수를 이분할 에지수라 하는데, 연결망의 이분할 에지수는 네트워크의 처리속도를 결정짓는 중요한 요소이며, 여러 연결망에서 연구가 진행되어 왔다[1, 4, 5, 11, 12]. 일반적으로 이분할 에지수를 구하는 문제는 NP-Hard 문제임이 알려져 있다[1, 12].

연결망에서 임의의 두 노드 사이에 존재하는 노드 중복 없는 경로들을 병렬경로 집합(container)이라고 하는데, 병렬경로 집합이 존재하면 두 노드 사이에 많은 양의 데이터를 동시에 전송하여 속도를 증가시킬 수 있을 뿐만 아니라, 연결망이 분리 되지 않을 만큼의 고장이 발생했을 때 대체 경로를 구성할 수 있다는 장점이 있다. 본 논문에서는 이러한 병렬경로 집합을 이용하여 $HS(2n,n)$의 k-광역지름과 고장지름을 분석한다. k-광역지름은 연결망의 지름을 일반화한 개념으로 고장지름과 밀접한 관련이 있다[1]. 고장 지름은 상호연결망의 통신 능률과 신뢰도를 평가하는 중요한 요소 중

† 정 회 원 : 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과학과 Postdoctoral
†† 종신회원 : 순천대학교 사범대학 컴퓨터교육과 조교수(교신저자)
논문접수 : 2005년 5월 19일, 심사완료 : 2005년 11월 30일

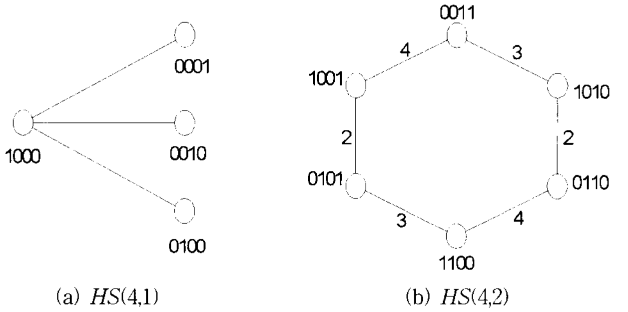
하나로 널리 알려진 여러 연결망에서 고장 지름에 대한 연구가 진행되어 왔다[1-3, 6, 9]. 고장 지름은 Krishnamoorthy와 Krishnamurthy에 의해 처음으로 제안된 개념이다[6]. 본 논문에서는 $HS(2n,n)$의 고장 지름이 $HS(2n,n)$의 지름에 약간의 고정값을 더한 것임을 보인다. 이 결과는 $HS(2n,n)$의 통신지연 시간이 거의 발생하지 않는다는 것을 나타낸다.

다음 장에서는 하이퍼-스타에 대하여 알아보고, 3장에서는 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 이분할 에지수, k-광역지름과 고장지름을 분석하고, 마지막으로 결론을 맺도록 하겠다.

2. 하이퍼-스타 그래프 성질

하이퍼-스타 $HS(m,k)$는 $\binom{m}{k}$개의 노드로 구성된 연결망으로 각 노드는 0과 1로 구성된 m개의 비트스트링 $b_1b_2\ldots b_i\ldots b_m$으로 표현되며($1 \le i \le m$), $|b_i=\text{"1"}|=k$ 이다. b_1과 b_i가 보수일 때 b_1과 b_i를 교환하는 치환을 σ_i라 하면, $v=\sigma_i(u)$인 두 노드 $u=b_1b_2\ldots b_i\ldots b_m$와 $v=b_ib_2\ldots b_1\ldots b_m$사이에 에지가 발생하며, u와 v를 연결하는 에지를 i-에지라고 한다. 하이퍼-스타 $HS(m,k)$는 매우 간단한 라우팅 알고리즘과 유용한 확장성을 가지고 있고, 이분할 연결망이며, $m=2k$일 때 노드 대칭적이고, 최대 고장 허용도를 가지고 있다[7, 13]. 하이퍼-스타 $HS(m,k)$는 $m=2k$일 때 정규연결망이고, 그렇지 않을 경우에는 비정규연결망이다. 본 논문에서는 정규연결망 $HS(2n,n)$의 이분할 에지수와 고장 지름을 분석한다. (그림 1)은 하이퍼-스타 $HS(4,1)$과 $HS(4,2)$를 나타낸다.

하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 임의의 노드 u에서 치환 $\sigma_{k1},\sigma_{k2},\ldots,\sigma_{ki},\ldots,\sigma_{kt}$을 순차적으로 적용하여 정해지는 경로를 $[k_1,k_2,\ldots,k_i,\ldots,k_t]$로 표시하겠다. 그러면 $HS(2n,n)$의 에지 발생 조건에 의해 k_i는 i-에지를 나타낸다는 것을 알 수 있다. $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 $u=a_1a_2\ldots a_i\ldots a_{2n}$와 $v=b_1b_2\ldots b_i\ldots b_{2n}$라고 하고, 두 노드 u와 v 사이에 Exclusive-OR 함수를 적용시킨 결과를 $R=r_1r_2\ldots r_i\ldots r_{2n}$ 이라고 하고 $r_i=1$인 비트들의 집합을 R^1이라고 표시하겠다. 두 노드 u와 v를 연결하는 최단경로를 P라고 하면, $P=[i|r_i=1,\ 2 \le i \le 2n]$이다. 왜냐하면 임의의 두 노드 u와 v의 첫 번째 비트스트링이 보수 관계에 있고, 나머지 비트스트링에 Exclusive-OR 함수를 적용시켰을 때 $r_i=1(i \ne 1)$인 비트가 하나만 존재하는 경우에 i-에지가 발생하므로 $r_i=1$인 비트의 위치 즉, i 값에 따라 경로를 구성하면 최단경로 P가 구성됨을 쉽게 알 수 있다. 이것은 [7]에서 제안한 최단경로 라우팅 알고리즘을 나타낸다. r_1은 첫 번째 비트스트링이 보수 관계에 있는지 아닌지를 나타내므로 경로 구성에는 영향을 미치지 않는다. 또한 최단경로 P는 i 값의 순서에 상관없이 구성될 수 있음을 알 수 있다. 예를 들면 노드 u=000111, 노드 v=110100이라고 하면, R=110011이고, $R^1=\{1,2,5,6\}$이므로 최단경로 P를 구성하는 i는 $\{2,5,6\}$이다. 그러므로 최단경로 P는 $[5,2,6]$ 혹은 $[6,2,5]$이다. 이러한 성질을 다음과 같이 정리할 수 있다.



(a) $HS(4,1)$ (b) $HS(4,2)$

(그림 1) $HS(4,1)$와 $HS(4,2)$

성질 1 노드 u로부터 노드 v를 연결하는 경로 P에 포함된 임의의 노드를 w라고 하고, w와 i-에지로 연결된 노드를 w'라고 하자. 만약$i \in R^1$이고 에지 (w,w')가 경로 P에 포함된 에지이면 에지 (w,w')는 노드 u로부터 노드 v를 연결하는 최단경로를 구성한다.

성질 2 $HS(2n,n)$의 노드 u를 0^n1^n이라고 하고, u를 출발노드로 하는 두 개의 경로 $P=[k_1,k_2,\ldots,k_i,\ldots,k_t]$와 $Q=[h_1,h_2,\ldots,h_i,\ldots,h_t]$가 있다고 하자($1 \le i \le t$). 만약 k_i와 h_i가 순서에 상관없이 서로 같으면 경로 P와 경로 Q에 의해 도착하는 노드는 동일하다.

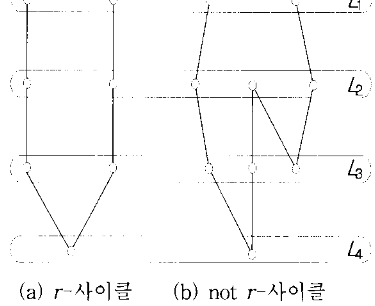
그리고 임의의 두 노드 u와 v 사이의 거리를 $dist(u,v)$라고 표시하면, 두 노드 사이의 거리 $dist(u,v)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$dist(u,v)=\sum_{i=2}^{2n} r_i,\ (r_i=a_i \oplus b_i)$$

$HS(m,k)$의 임의의 노드 $u=0\ldots01\ldots1$의 "0"의 개수가 r이고 "1"의 개수가 $m-r$이면 0^r1^{m-r}로 표시하겠다.

정의 1 $HS(2n,n)$ 그래프의 임의의 두 노드를 $u=0^n1^n$와 w라고 하자. 만약 두 노드의 거리 $dist(u,w)$가 m이면, 임의의 노드 w는 레벨 L_m에 위치한다고 한다.

정의 2 임의의 노드를 기준으로 하여, 각 레벨 L_m에 위치한 노드를 최대 2개만 사용하여 구성한 사이클을 r-사이클이라 한다.



(a) r-사이클 (b) not r-사이클

(그림 2) r-사이클

길이가 $4n-2$인 r-사이클 내부에 위치한 두 노드를 x와 y 라고 하자. 두 노드 x와 y가 위치한 레벨을 L_x와 L_y라고 하면레벨 L_x와 L_y 사이의 최대 거리는 $2n-1$이다.

정리 1 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$ 내부에 존재하는 사이클의 최소 길이는 6이다.

증명 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$ 내부에 존재하는 사이클의 최소 길이가 6임을 보이기 위해 길이가 2,3,4,5인 사이클이 존재하지 않음을 먼저 보인 후에 최소 길이가 6임을 보인다.

- **경우 1)** 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$은 이분할 연결망이고, $HS(2n,n)$ 내부에 존재하는 모든 사이클의 길이는 짝수이므로[7], $HS(2n,n)$ 내부에는 홀수 길이의 사이클이 존재하지 않는다.
- **경우 2)** 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$ 내부에는 멀티 에지를 갖는 노드가 존재하지 않으므로 경로 길이 2인 사이클이 존재하지 않는다.
- **경우 3)** 길이가 4인 사이클이 존재하기 위해서는 사이클을 구성하는 임의의 두 노드 사이의 최대거리는 2여야만 한다. 임의의 두 노드를 노드 $u=0^n1^n$와 v라고 하면, 노드 $u=0^n1^n$는 치환 $\sigma_i(u)$에 의해 노드 u'에 연결된다($n+1 \le i \le 2n$). u'의 첫 번째 비트는 "1"이고, 노드 u'는 치환 $\sigma_j(u')$에 의해 첫 번째와 i번째 비트는 "0"인 노드 v에 연결된다($2 \le j \le n$). 두 노드 $u=0^n1^n$와 v의 $dist(u,v)$는 2이고 두 노드를 연결하는 경로는 $[i,j]$이다. 성질 2에 의해 u와 v를 연결하는 다른 경로 $[j,i]$가 구성되어야 하지만, $n+1 \le i \le 2n$이고, $2 \le j \le n$이므로 노드 u에 인접해 있는 j-에지는 존재하지 않음을 알 수 있다. 따라서 경로 $[j,i]$가 구성될 수 없으므로 길이가 4인 사이클이 존재하지 않음을 알 수 있다.
- **경우 4)** 노드 $u=0^n1^n$는 치환 $\sigma_i(u)$에 의해 노드 u'에 연결된다($n+1 \le i \le 2n$). u'의 첫 번째 비트는 "1"이고, 노드 u'는 치환 $\sigma_j(u')$에 의해 노드 u''에 연결된다($2 \le j \le n$). 노드 u''의 첫 번째와 i번째 비트는 "0"이고, 노드 u''는 치환 $\sigma_k(u'')$에 의해 노드 u^+에 연결된다($n+1 \le k \ne i \le 2n$). 경로 $[i,j,k]$와 경로 $[k,j,i]$의 에지들이 순서에 상관없이 서로 같으므로, 두 경로는 성질 2에 의해 노드 u와 노드 u^+를 연결하는 서로 다른 경로임을 알 수 있다. 그러므로 경로 $[i,j,k]$와 경로 $[k,j,i]$을 연결하면 길이 6인 사이클이 구성됨을 알 수 있으므로, $HS(2n,n)$ 내부에 존재하는 사이클의 최소 길이는 6이다. 예를 들면 (그림 1)의 (b)$HS(4,2)$에서 노드 0011로부터 노드 1100에 이르는 경로를 보면 경로 $Q_1=[4,2,3]$과 경로 $Q_2=[3,2,4]$가 존재함을 볼 수 있다. 두 경로 Q_1과 Q_2를 연결하면 경로 $Q_3=[4,2,3,4,2,3]$가 생성되는데 경로 Q_3에 의해 구성되는 길이 6인 사이클이 존재함을 알 수 있다.

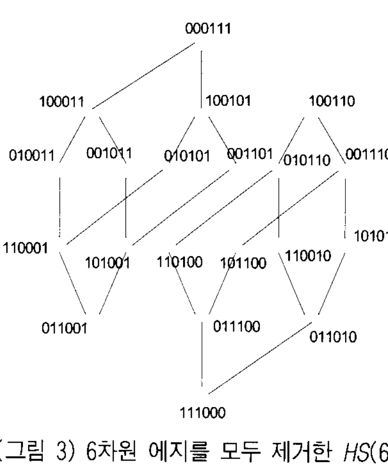
3. 이분할 에지수와 고장 지름

3.1 이분할 에지수

임의의 연결망 G의 이분할 에지수는 연결망 G를 노드수가 $\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$와 $\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$($V$는 노드 집합)인 두개의 서브그래프로 나누기 위해 제거해야 할 최소 에지개수이다[1].

정리 2 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 이분할 에지수는 최대 $\binom{2n-2}{n-1}$이다.

증명 계산식 $dist(u,v)$에 의해 두 노드 $u=0^n1^n$와 $v=1^n0^n$의 거리는 $2n-1$이므로 u를 기준으로 노드 $u=0^n1^n$은 L_0에 위치해있고 노드 $v=1^n0^n$이 L_{2n-1}에 위치해 있음을 알 수 있다. 노드 u로부터 노드 v에 이르는 경로 P를 $[k_1,k_2,\ldots,k_i,\ldots k_{2n-1}]$로 나타내고 경로 P를 구성하는 k_i의 개수를 $|k_i|$로 나타내겠다. 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 분지수는 n[7]이므로 $n+1 \le k_1 \le 2n$일 때 $|k_1|$은 n이고 $n+1 \le k_3(\ne k_1) \le 2n$일 때 $|k_3|$은 $n-1$이며,..., $n+1 \le k_{2n-1}(\ne k_a,(1 \le a=\text{홀수}<2n-1)) \le 2n$일 때 $|k_{2n-1}|$은 1이라는 것을 알 수 있다. 그러므로 i가 홀수일 때 경로 P를 구성할 수 있는 k_i의 총 개수는 $n!$이다. 마찬가지로 $2 \le k_2 \le 2n-2$일 때 $|k_2|$는 $n-1$이고 $2 \le k_4(\ne k_2) \le n$일 때 $|k_4|$는 $n-2$이며, $2 \le k_{2n-2}(\ne k_b,(2 \le b=\text{짝수}<2n-2)) \le 2n-2$일 때 $|k_{2n-2}|$는 1이라는 것을 알 수 있으므로 j가 짝수일 때 경로 P를 구성할 수 있는 k_j의 총 개수는 $(n-1)!$이다. 이것은 노드 u로부터 노드 v에 이르는 경로들의 총 수가 $(n-1)!n!$임을 의미한다. 노드 u로부터 노드 v에 이르는 경로 $[k_1,k_2,\ldots,k_{2n-2},k_{2n-1}]$가 존재한다면 성질 2에 의해 경로 $[k_{2n-1},k_{2n-2},\ldots k_2,k_1]$도 존재함을 알 수 있다. 따라서 노드 u로부터 노드 v에 이르는 모든 경로상에서 특정한 i-에지를 모두 제거하면 $HS(2n,n)$은 대칭인 두 개의 서브연결망으로 분리된다. $HS(2n,n)$의 에지의 개수는 $\frac{n\binom{2n}{n}}{2}$이고 i-에지의 개수는 $\frac{n\binom{2n}{n}}{2(2n-1)}=\binom{2n-2}{n-1}$이다. 그러므로 $HS(2n,n)$의 이분할 에지수는 최대 $\binom{2n-2}{n-1}$임을 알 수 있다.



(그림 3) 6차원 에지를 모두 제거한 $HS(6,3)$

3.2 고장지름

그래프 G의 임의의 두 노드를 u와 v라 할 때, (u,v)-병렬 경로 집합은 u와 v 사이의 노드 중복 없는 경로들의 집합을 의미한다. 병렬경로 집합의 크기는 노드 중복 없는 경로 개수를 의미하고, 병렬경로 집합의 거리는 노드 중복 없는 경로 길이 중 거리가 가장 큰 경로의 길이를 의미한다[1].

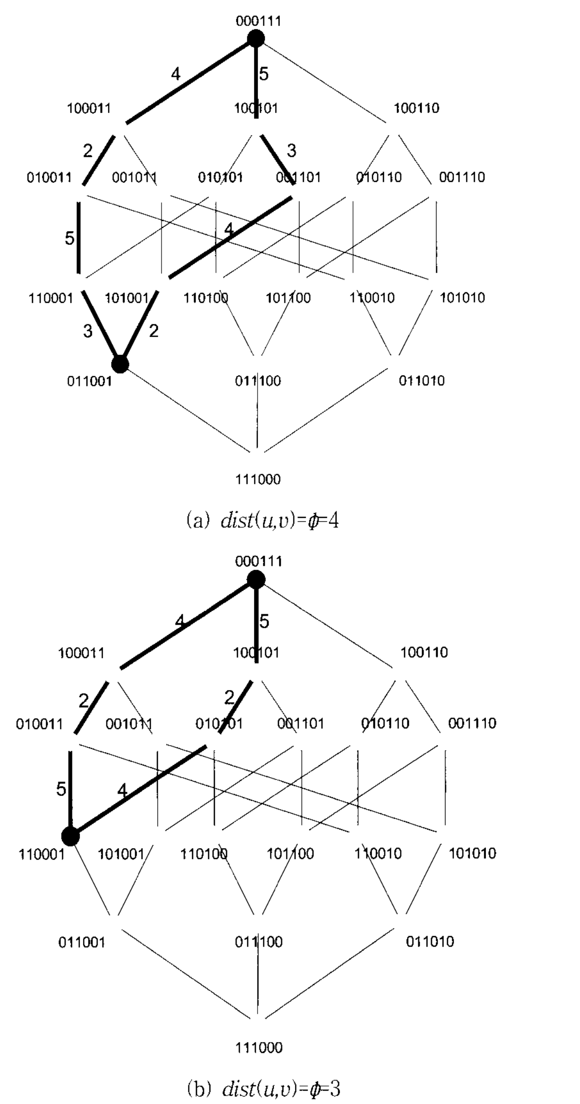
정의 3 그래프 G의 분지수를 k라 하면, 크기가 k인 병렬 경로 집합의 최단거리를 두 노드 사이의 k-거리(distance)라고 한다. 그래프 G의 임의의 두 노드들의 k-거리 중에 최대 k-거리를 k-광역지름(wide diameter), $D_k(G)$이라고 한다. 그래프 G의 고장허용도를 k-1이라 하고, 그래프 G의 서브그래프인 최대 k-1개의 고장노드를 갖는 그래프를 G_f 라고 하면, 그래프 G의 고장 지름, $D^f_{k-1}(G)$ 은 G_f 의 지름이다.

k-광역지름의 개념은 고장 지름의 개념과 밀접하게 관련되어 있다. 그래프 G의 지름을 $D(G)$라고 하면, $D(G) \leq D^f_{k-1}(G) \leq D_k(G)$ 임은 [1]에서 증명되었다. 만약 고장 지름이 지름값 + 상수이면 G의 통신 지연 시간은 순차적으로 증가한다. 정규형 그래프 $HS(2n,n)$의 분지수는 n이며, 지름은 $2n$-1이고, 노드 연결도가 n임은 [7]에서 증명되었다.

$S_1=(a_1,a_2,...,a_p)$, $S_2=(b_1,b_2,...,b_q)$라고 하면, S_1과 S_2는 순환적 교환 순서($\odot$)의 원소로 구성된 집합이다. S_1과 S_2의 순환적 교환 순서($\odot$)는 기호로 $S_1\odot S_2$으로 나타내고, 의미적으로는 S_1과 S_2의 원소들을 번갈아 사용하여 구성되는 집합이다. 순환적 교환 순서를 이용하여 병렬경로 집합을 구성하겠다. 만약 S_2의 원소가 S_1의 원소보다 하나 적은 상태에서 S_1과 S_2의 원소들을 번갈아 사용하여 구성되는 집합은 $S_1\odot S_2$ 로 표시하겠다. 예를 들면, $S_1=(5,6,7)$, $S_2=(2,3,4)$라고 하면 $S_1\odot S_2=\{(5,2,6,3,7,4),(6,3,7,4,5,2), (7,4,5,2,6,3)\}$이다. 또 $S_1=(5,6,7)$, $S_2=(2,3)$라고 하면 $S_1\odot S_2^-=\{(5,2,6,3,7),(6,2,7,3,5),(7,2,5,3,6)\}$이다. 집합에 포함된 하나의 원소 i는 치환 σ_i를 나타낸다. 따라서 예를 들었던 $S_1\odot S_2$ 집합은 경로가 [5,2,6,3,7,4], [6,3,7,4,5,2], [7,4,5,2,6,3]인 세 개의 경로로 나타낼 수 있다. 마찬가지로 $S_1\odot S_2^-$ 집합도[5,2,6,3,7], [6,2,7,3,5], [7,2,5,3,6]인 세 개의 경로로 나타낼 수 있다. $S_1\odot S_2$ 집합에 포함된 각 경로들은 성질 2에 의해 모두 노드 중복 없는 경로임을 알 수 있다. 마찬가지로 $S_1\odot S_2^-$에 포함된 각 경로들도 모두 노드 중복 없는 경로이다.

정리 3 $HS(2n,n)$의 노드 $u=0^n1^n$로부터 임의의 노드 v에 이르는 경로를 P라 하고, $dist(u,v)=\phi$ 이라고 하면, 경로 P를 포함하는 길이 2ϕ인 r-사이클이 $\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil$-1개 존재한다.

증명 $HS(2n,n)$의 지름은 $2n$-1[7]이므로 $dist(u,v)$는 최대 $2n$-1이고, $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 노드 $u=0^n1^n$와 노드 v라고 하자. 경로 $P=[n+1,2,n+2,3,...,n+\frac{\phi}{2},\frac{\phi}{2}+1]$ 이라고 하면, $dist(u,v)$는 짝수이고, $S_1=(n+1,n+2,...,n+\frac{\phi}{2})$이며, $S_2=(2,3,...,\frac{\phi}{2}+1)$이다. 순환적 교환 순서 $S_1\odot S_2$에 의해 구성되는 경로들의 집합을 보면, 각 경로들은 모두 노드 중복 없는 경로이고, 경로의 개수는 $\frac{\phi}{2}$이다. $S_1\odot S_2$에 의해 구성된 임의의 한 경로를 $Q(\neq P)$라 하자. 경로 P와 Q의출발노드는 $u=0^n1^n$이고, 목적노드는 v이다. 노드 u는 레벨 L_0에 위치해 있다. 경로 P상에 존재하는 임의의 두 인접 노드를 p_i, p_j라고 하면,$dist(u,p_j)=dist(u,p_i)+1$이다. 이것은 경로 P상에 존재하는 모든 노드들은 서로 다른 레벨 L_m에 위치해 있다는 것을 나타낸다. 경로 Q상에 존재하는 노드들도 마찬가지이다. 경로 P와 Q 둘 다 노드 중복 없는 경로이므로, 두 경로를 연결하면 하나의 r-사이클을 구성한다. 그러므로 경로 P를 포함하는 길이 2ϕ인 r-사이클이 $\frac{\phi}{2}$-1개 존재한다는 것을 알 수 있다. (그림 4-a)를 예를 들어 설명하겠다.노드 u=000111라고 하고 노드 v=011001라고 하자. 그러면 노드 $dist(u,v)$=짝수=4이고 노드 u로부터 노드 v에 이르는 한 경로 P=[4,2,5,3]가



(a) $dist(u,v)=\phi=4$

(b) $dist(u,v)=\phi=3$

(그림 5) $HS(6,3)$의 r-사이클

존재함을 알 수 있으므로, S_1=(4,5)이고, S_2= (2,3)이며, 경로 Q=[5,3,4,2]가 존재함을 알 수 있다. 그러므로 두 경로 P와 Q를 연결하여 구성된 길이 2ϕ=8인 r-사이클이 $\frac{\phi}{2}$-1=1개 존재한다는 것을 알 수 있다. 경로 $P=[n+1,2,n+2,3,...,\lceil\frac{\phi}{2}\rceil,n+\lceil\frac{\phi}{2}\rceil]$이라고 하면, $dist(u,v)$는 홀수이고, $S_1=(n+1,n+2,...,n+\lceil\frac{\phi}{2}\rceil)$이며, $S_2^-=(2,3,...,\lceil\frac{\phi}{2}\rceil)$이다. 순환적 교환 순서 $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구성되는 경로들의 집합을 보면, 각 경로들은 모두 노드 중복 없는 경로이고, 경로의 개수는 $\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$이다. $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구성된 임의의 한 경로를 $Q(\neq P)$라 하자. 경로 P와 Q 둘 다 출발노드는 u이고, 목적노드는 v이다. 경로 P 혹은 Q 상에 존재하는 임의의 두 인접 노드를 p_i, p_j라고 하면,$dist(u,p_j)=dist(u,p_i)+1$이다. 경로 P와 Q 둘 다 노드 중복 없는 경로이므로, 두 경로를 연결하면 하나의 r-사이클을 구성한다. 그러므로 경로 P를 포함하는 길이 2ϕ인 r-사이클이 $\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$-1개 존재한다는 것을 알 수 있다. (그림 4-b)를 예를 들어 설명하겠다. 노드 u=000111라고 하고 노드 v=110001라고 하자. 그러면 노드 $dist(u,v)$에서 홀수=3이고 노드 u로부터 노드 v에 이르는 한 경로 P=[4,2,5]가 존재함을 알 수 있으므로, S_1=(4,5)이고, S_2^-=(2)이며, 경로 Q=[5,2,4]가 존재함을 알 수 있다. 그러므로 두 경로 P와 Q를 연결하여 구성된 길이 2ϕ=6인 r-사이클이 $\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$-1=1개 존재한다는 것을 알 수 있다.

정리 4 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 u와 v라고 하면, $D_n(HS(2n,n)) \leq dist(u,v)+5$이다.

증명 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$은 노드 대칭[13]이다. $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 노드 $u=0^n1^n$와 노드 v라고 하고, $dist(u,v)=\phi$라고 하자. 그러면 노드 u는 L_0에 노드 v는 L_ϕ에 위치해 있음을 알 수 있다. ϕ가 1인 경우와 짝수인 경우, 그리고 홀수인 경우로 나누어 증명하겠다.

• **경우 1)** ϕ가 1인 경우

정리 1에서 $HS(2n,n)$ 내부에 존재하는 사이클의 최소 길이가 6임을 증명하였으므로 광역지름 $D_n(HS(2n,n))$이 $dist(u,v)+5$임을 쉽게 알 수 있다.

• **경우 2)** ϕ가 짝수인 경우

노드 u로부터 임의의 노드 v에 이르는 경로를 $P=[n+1,2,n+2,3,...,n+\frac{\phi}{2},\frac{\phi}{2}+1]$ 라고 하면, $S_1=(n+1,n+2,...,n+\frac{\phi}{2})$이고, $S_2=(2,3,...,\frac{\phi}{2}+1)$이다. 정리 3에 의해 ϕ가 짝수이고, 노드 u로부터 노드 v까지의 거리인 길이 $dist(u,v)$를 갖는 노드 중복 없는 경로의 개수는 $\frac{\phi}{2}$임을 알 수 있다. 이러한 경로는 $S_1 \odot S_2$에 의해 구성되는 경로이다. 또 $n+\frac{\phi}{2}+1$과 $2n$ 사이에 위치한 $n-\frac{\phi}{2}$개의 원소들은 $S_1 \odot S_2$에 의해 구성된 경로상에는 포함되지 않는다. 노드 u로부터 임의의 노드 v에 이르는 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 $n-\frac{\phi}{2}$개의 경로를 구성하겠다$(n+\frac{\phi}{2}+1 \leq j \leq 2n)$. 경로 P'는 경로 P에 포함된 임의의 두 인접한 원소 (p_i,p_j)의 순서를 바꿔 놓은 경로이다. 즉 $P'=[2,n+1,3,n+2,...,\frac{\phi}{2}+1,n+\frac{\phi}{2}]$이다. $S_1 \odot S_2$에 의해 구성되는 경로와 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 경로들은 j가 경로 P에 포함되지 않은 원소이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 노드 v를 σ_j에 의해 치환한 노드를 v'라고 하고, 경로 Q를 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 경로라고 하자. 그러면 v'는 레벨 $L_{\phi+1}$에 위치하고, Q의 서브경로 $Q'=[j,P']$는 노드 u로부터 노드 v'에 이르는 경로가 된다. 그러므로 P를 포함하는 노드 u로부터 노드 v'에 이르는 경로와 경로 Q'를 연결하면 길이 $2\phi+2$인 r-사이클이 구성된다. 경로 P의 길이는 ϕ이므로, 경로 Q의 길이는 $\phi+2$이다. 노드 중복 없는 경로 Q의 개수는 $n-\frac{\phi}{2}$개이므로, 경로 P를 포함하는 길이 $2\phi+2$인 r-사이클도 $n-\frac{\phi}{2}$개 존재한다. 그러므로 만약 ϕ이 짝수이면, 길이가 $dist(u,v)$인 경로 $\frac{\phi}{2}$개와 길이가 $dist(u,v)+2$인 경로 $n-\frac{\phi}{2}$개로 구성된 n개의 노드 중복 없는 경로가 존재함을 알 수 있다. (그림 5-a)를 예를 들어 설명하겠다.노드 u=000111라고 하고 노드 v=011001이라고 하면, $dist(u,v)=\phi=4$이다. 그러면 노드 u로부터 노드 v에 이르는 경로 P=[4,2,5,3]가 존재함을 알 수 있으므로, S_1=(4,5)이고, S_2=(2,3)이며, j=6임을 알 수 있다. 그러므로 길이 $dist(u,v)$에서 $\phi=4$인 $\frac{\phi}{2}$=2개의 경로 P=[4,2,5,3] (P'=[2,4,3,5])와 T=[5,3,4,2]가 존재하고 길이 $dist(u,v)+2=6$인 $n-\frac{\phi}{2}$=1개의 경로 Q=[6,2,4,3,5,6]가 존재함을 알 수 있다.

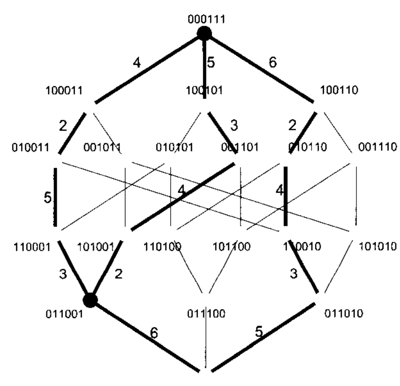
• **경우 3)** ϕ가 홀수인 경우$(\phi \neq 1)$

노드 u로부터 임의의 노드 v에 이르는 경로를 $P=[n+1,2,n+2,3,...,\lceil\frac{\phi}{2}\rceil,n+\lceil\frac{\phi}{2}\rceil]$라고 하면, $S_1=(n+1,n+2,..., n+\lceil\frac{\phi}{2}\rceil)$이고, $S_2^-=(2,3,...,\lceil\frac{\phi}{2}\rceil)$이다. 정리 3에 의해 ϕ가 홀수이고, 노드 u로부터 노드 v까지의 거리인 길이 $dist(u,v)$를 갖는 노드 중복 없는 경로의 개수는 $\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$임을 알 수 있다. 이러한 경로는 $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구성되는 경로이다. 또 $n+\lceil\frac{\phi}{2}\rceil+1$과 $2n$ 사이에 위치한 원소 j와 $\lceil\frac{\phi}{2}\rceil+1$와 n사이에 위치한 원소 k로 구성된 순환적 교환 순서쌍을 (j,k)라 하면, (j,k)는 $n-\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$개 존재하며, $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구성된 경로상에는 포함되지 않는다. 노드 u로부터 임의의 노드 v에 이르는 $[j,k,P,j,k]$ 형태를 갖는 $n-\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$개의 경로를 구성하겠다. 이 때 $j=k+n(n+\lceil\frac{\phi}{2}\rceil \leq j \leq 2n, \lceil\frac{\phi}{2}\rceil+1 \leq k \leq n)$이다. $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구성되는 경로와 $[j,k,P,j,k]$ 형태를 갖는 경로들은 (j,k)가 경로 P에 포함되지 않은 순서쌍이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는

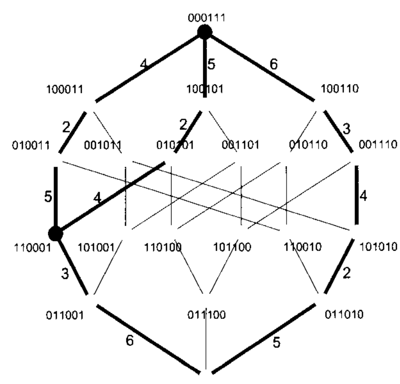
〈표 1〉 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 지름, 광역지름, 고장지름 비교

$HS(2n,n)$	$dist(u,v)$	지름	광역지름	고장지름
$HS(4,2)$	1	3	5	5
	2		4	
	3		3	
$HS(6,3)$	1	5	5	7
	2		4	
	3		7	
	4		6	
	5		5	
$HS(8,4)$	1	7	5	9
	2		4	
	3		7	
	4		6	
	5		9	
	6		8	
	7		7	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$HS(2n,n)$	1	$2n-1$	5	$2n+1$ 이하
	2		4	
	3		7	
	⋮		⋮	
	$2n-1$		$dist(u,v)+4$(홀수), $dist(u,v)+2$(짝수)	

다. 노드 v를 σ_k , σ_j에 의해 치환한 노드를 v'라고 하고, 경로 Q를 $[j,k,P,j,k]$ 형태를 갖는 경로라고 하자. 그러면 v'는 레벨 $L_{\phi+2}$에 위치하고, Q의 서브경로 $Q'=[j,k,P]$는 노드 u로부터 노드 v'에 이르는 경로가 된다. 그러므로 P를 포함하는 노드 u로부터 노드 v'에 이르는 경로와 경로 Q'를 연결하면 길이 $2\phi+4$인 r-사이클이 구성된다. 즉 경로 P와 경로 Q를 연결하는 r-사이클과 같은 형태를 갖는다. 경로 P의 길이는 ϕ이므로, 경로 Q의 길이는 $\phi+4$이다. 노드 중복이 없는 경로 Q의 개수는 $n-\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil$개이므로, 경로 P를 포함하는 길이 $2\phi+4$인 r-사이클도 $n-\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil$개 존재한다. 그러므로 만약 ϕ이 홀수이면, 길이가 $dist(u,v)$인 경로 $\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil$개와 길이가 $dist(u,v)+4$인 경로 $n-\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil$개로 구성된 n개의 노드 중복 없는 경로가 존재함을 알 수 있다. (그림 5-b)를 예를 들어 설명하겠다.노드 u=000111라고 하고 노드 v=110001이라고 하면, $dist(u,v)=\phi=3$이다. 그러면 노드 u로부터 노드 v에 이르는 경로 $P=[4,2,5]$가 존재함을 알 수 있으므로, $S_1=(4,5)$이고, $S_2^-=(2)$이며, $j=6$, $k=3$임을 알 수 있다. 그러므로 길이 $dist(u,v)=\phi=3$인 $\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil=2$개의 경로 $P=[4,2,5]$와 $T=[5,2,4]$가 존재하고 길이 $dist(u,v)+4=7$인 $n-\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil=1$개의 경로 $Q=[6,3,4,2,5,6,3]$가 존재함을 알 수 있다.



(a) $dist(u,v)=\phi=4$



(b) $dist(u,v)=\phi=3$

(그림 5) $HS(6,3)$의 순환적 교환 순서

정리 5 $D^f_{n-1}(HS(2n,n))$ = $2n+1$ = $D(HS(2n,n))$ +2.

증명 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 지름 $D_n(HS(2n,n))$은 $2n-1$ [7]이고, $HS(2n,n)$은 노드 대칭[13]이다. 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 노드 $u=0^n1^n$와 노드 v라고 하자. $dist(u,v)$에 따라 $HS(2n,n)$의 고장지름 $D^f_{n-1}(HS(2n,n))$이 성립함을 증명하겠다.

- **경우 1)** $dist(u,v)=2n-1$ 일 때

$dist(u,v)=D_n(HS(2n,n))$이므로 두 노드 $u=0^n1^n$와 v 사이의 모든 노드 중복 없는 경로의 길이가 $2n-1$임을 알 수 있으므로, $D^f_{n-1}(HS(2n,n))=D(HS(2n,n))=2n-1<2n+1$이다.

- **경우 2)** $dist(u,v)=2n-2$ 일 때

$dist(u,v)$가 짝수이므로 정리 4에 의해 길이 $dist(u,v)+2$인 노드 중복 없는 경로가 존재함을 알 수 있으므로, $D^f_{n-1}(HS(2n,n))=dist(u,v)+2=2n<2n+1$이다.

- **경우 3)** $dist(u,v)=2n-3$ 일 때

$dist(u,v)$가 홀수이므로 정리 4에 의해 길이 $dist(u,v)+4$인 노드 중복 없는 경로가 존재함을 알 수 있으므로, $D^f_{n-1}(HS(2n,n))=dist(u,v)+4=2n+1$이다.

- **경우 4)** $dist(u,v)<2n-3$ 일 때

$dist(u,v)$가 홀수인 경우 $dist(u,v)+4\le 2n-1$이고, $dist(u,v)$가 짝수인 경우 $dist(u,v)+2<2n-1$이므로, $D^f_{n-1}(HS(2n,n))<2n+1$이다.

그러므로 $D^f_{n-1}(HS(2n,n))=2n+1=D(HS(2n,n))+2$임을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 이분할 에지수가 최대 $\binom{2n-2}{n-1}$임과 $HS(2n,n)$의 병렬경로 집합을 이용하여 k-광역지름이 $dist(u,v)+4$ 이하임과 $HS(2n,n)$의 고장지름이 $D(HS(2n,n))+2$ 이하임을 보였다.

상호연결망의 고장지름이 지름 값과 비슷하다는 것은 그 연결망에서 분지수 이하의 노드가 고장이 발생해도 임의의 두 노드 간에 메시지를 전송하는데 전송시간 지연이 거의 발생하지 않음을 의미한다. 이러한 결과는 상호 연결망 $HS(2n,n)$의 고장 감내가 매우 우수하다는 것을 의미한다.

참 고 문 헌

[1] C.-P. Chang, T.-y. Sung, and L.-H. HSu, "Edge Congestion and Topological Properties of Crossed Cubes," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.11, No.1, pp.64-80, 2000.

[2] D.Z. Du, D.F. Hsu, Y.D. Lyuu, "On the diameter vulnerability of Kautz digraphs," Discrete Math. Vol.151, pp.81-85, 1996.

[3] D.R. Duh, G.H. Chen, "On the Rabin number problem," Networks, Vol.30, pp.219-230, 1997.

[4] H. Hu, N. Gu, and J. Cao, "A Note on Recursive Cube of Rings Network," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.16, No.10, pp.1007-1008, 2005.

[5] P. K. Jha, "A Counterexample to Tang and Padubidri's Claim about the bisection width of a Diagonal Mesh," IEEE Trans. Computers, Vol.52, No.5, pp.676-677, 2003.

[6] M.S. Krishnamoorthy, B. Krishnamurthy, "Fault diameter of interconnection networks," Comput. Math. Apl., Vol.13, No.5-6, pp.577-582, 1987.

[7] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002, LNCS 2510, pp.858-865, 2002.

[8] F.T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, 1992.

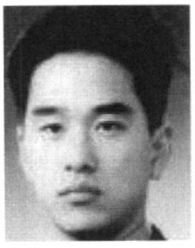
[9] S.C. Liaw, G.J. Chang, F. Cao, D.F. Hsu, "Fault-tolerant routing in circulant networks and cycle prefix networks," Ann. Comb., Vol.2, No.5-6, pp.165-172, 1998.

[10] V.E. Mendia and D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.3, No.4, pp.389-396, 1992.

[11] B. Parhami, and M. Rakov, "Perfect Difference Networks and Related Interconnection Structures for Parallel and Distributed Systems," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.16, No.8, pp.714-724, 2005.

[12] K.W. Tang and S.A. Padubidri, "Diagonal and Toroidal Mesh Networks," IEEE Trans. Computers, Vol.43, No.7, pp.815-826, 1994.

[13] 김종석, 오은숙, 이형옥, "하이퍼-스타 연결망의 위상적 망성질과 방송 알고리즘", 한국정보처리학회 논문지, Vol.11-A, No.5, pp.341-346, 2004.



김 종 석

e-mail : rockhee7@korea.com
1995년 순천대학교 전자계산학과(학사)
2001년 순천대학교 컴퓨터과학과(석사)
2004년 순천대학교 컴퓨터과학과(박사)
현 재 오클라호마 주립대학교
컴퓨터과학과 Postdoctoral
관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 계산이론, 광네트워크

이 형 옥

e-mail : oklee@sunchon.ac.kr
1994년 순천대학교 전자계산학과(학사)
1996년 전남대학교 전산통계학과(석사)
1999년 전남대학교 전산통계학과(박사)
1999년~2002년 한국전산원 선임연구원
2002년~현재 순천대학교 사범대학
컴퓨터교육과 조교수
관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 계산이론, 정보통신서비스 및 정책