# 하이퍼-스타 연결망의 위상적 성질과 방송 알고리즘

김 종 석† · 오 은 숙†† · 이 형 옥†††

## 요 약

최근에 병렬처리를 위한 새로운 위상으로 하이퍼-스타 그래프 $HS(m,k)$가 제안되었다. 하이퍼-스타 그래프는 하이퍼큐브와 스타 그래프의 성질을 가지고 있으면서, 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용이 우수한 그래프이다. 본 논문에서는 하이퍼-스타 그래프 $HS(m,k)$가 하이퍼큐브의 서브그래프임을 증명한다. 그리고 정규형 그래프인 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$가 제안된 매핑 기법에 의해 노드 대칭임을 보이며, 최소 높이를 갖는 스패닝 트리를 이용한 일-대-다 방송 기법을 제안하고, 방송 수행 시간이 $2n-1$임을 보인다.

# Topological Properties and Broadcasting Algorithm of Hyper-Star Interconnection Network

Jong-Seok Kim† · Eunseuk Oh†† · Hyeong-Ok Lee†††

## ABSTRACT

Recently A Hyper-Star Graph $HS(m,k)$ has been introduced as a new interconnection network of new topology for parallel processing. Hyper-Star Graph has properties of hypercube and star graph, further improve the network cost of a hypercube with the same number of nodes. In this paper, we show that Hyper-Star Graph $HS(m,k)$ is subgraph of hypercube. And we also show that regular graph, Hyper-Star Graph $HS(2n,n)$ is node-symmetric by introduced mapping algorithm. In addition, we introduce an efficient one-to-all broadcasting scheme - takes $2n-1$ times - in Hyper-Star Graph $HS(2n,n)$ based on a spanning tree with minimum height.

**키워드 : 상호연결망(Interconnection Network), 하이퍼큐브(Hypercube), 하이퍼-스타(Hyper-Star), 서브그래프(Subgraph), 대칭성(Symmetry), 방송(Broadcasting)**

## 1. 서 론

하이퍼큐브 연결망은 각종 응용 분야에서 요구하는 통신망 구조를 쉽게 제공할 수 있는 장점이 있어 기존의 연구용 및 상용 시스템에 널리 사용되고 있는 대표적인 상호 연결망이다. 노드 및 에지 대칭이고 간단한 라우팅 알고리즘과 최대 고장 허용도와 단순한 재귀적 구조를 가지고 있으며, 기존에 제안된 다양한 상호 연결망과 쉽게 임베딩 가능하다는 장점을 가지고 있다[4, 7, 9]. 이러한 하이퍼큐브 연결망을 기반으로 한 다양한 상호 연결망이 많이 발표되었다[2, 3, 5, 10].

최근에 병렬처리를 위한 새로운 위상으로 하이퍼-스타 그래프 $HS(m,k)$가 제안되었다[6]. 하이퍼-스타 그래프는 하이퍼큐브와 스타 그래프의 성질을 가지고 있으면서, 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용이 더욱 우수하고, 차원이 증가함에 따라 노드수가 급격하게 증가하는 스타 그래프의 단점을 개선한 그래프이다. 간단한 라우팅 알고리즘과 최대 고장 허용도와 유용한 확장성을 가지고 있으며, 이분할 그래프이다. 본 논문에서는 하이퍼-스타 그래프가 가지고 있는 몇 가지 유용한 성질을 분석하도록 하겠다.

먼저 하이퍼-스타 그래프가 하이퍼큐브의 서브그래프임을 보이고, 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$가 노드 대칭성을 가짐을 증명하겠다. 대칭성은 상호연결망을 평가하는 아주 중요한 요소 중의 하나이다[1, 9]. 대칭성이 있는 연결망은 노드의 부하를 다른 노드들에게 동일하게 분산할 수 있으므로 부하가 한 노드에 집중되지 않으며, 모든 노드가 같은 역할을 수행하므로 모든 노드에 동일한 알고리즘을 적용할 수 있게 한다. 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$에서 매핑 알고리즘을 제시함으로써 $HS(2n,n)$이 노드 대칭임을 보이겠다. 또한 $L_{n-1}$의 노드들과 $L_n$의 노드들을 연결하는 에지들을 모두 제거한 후 발생하는 두 개의 부연결망($L_i(0 \le i \le n-1)$의 노드들로 구성된 부연결망과 $L_j(n \le j \le 2n-1)$의 노드들

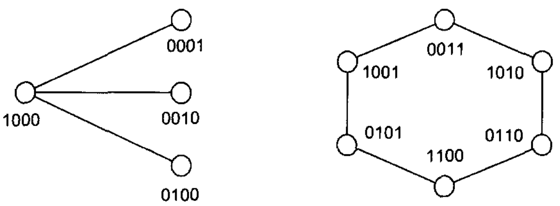
† 준 회 원 : 순천대학교 컴퓨터과학과 Postdoctoral
†† 준 회 원 : Virginia Commonwealth University Postdoctoral
††† 종신회원 : 교신저자, 순천대학교 컴퓨터교육과 교수
논문접수 : 2004년 4월 28일, 심사완료 : 2004년 9월 6일

로 구성된 부연결망)이 대칭임을 보이겠다.

방송은 상호연결망을 위한 가장 기본적인 데이터 통신기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로 노드와 노드 사이의 메시지 전송을 의미한다. 방송은 상호연결망에서 다양한 선형대수 알고리즘(matrix-vector multiplication, LU-factorization, Householder-transformations)을 포함하고 있는 많은 응용 분야들을 위한 매우 중요한 요소이다[4, 8]. 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$의 스패닝 트리를 이용한 일-대-다 방송 기법을 제안하고, 방송 수행 시간이 $2n-1$임을 보이겠다. 다음 장에서는 하이퍼-스타 $HS(m, k)$에 대하여 간략히 알아보고, 3장에서는 하이퍼-스타 $HS(m, k)$가 하이퍼큐브의 서브그래프임을 보이고, 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$가 노드 대칭임을 보이며, 4장에서는 $HS(2n, n)$의 스패닝 트리를 이용한 일-대-다 방송 기법을 제안하고, 마지막으로 결론을 맺도록 하겠다.

## 2. 관련 연구

하이퍼-스타 $HS(m, k)$는 $\binom{m}{k}$개의 노드로 구성된 연결망으로 각 노드는 $m$개의 비트스트링 $b_1b_2 \cdots b_i \cdots b_m$으로 표현되며, $|b_i = \text{"1"}| = k$이다. $b_1$과 $b_i$가 보수일 때 $b_1$과 $b_i$를 교환하는 치환을 $\sigma_i$라 하면, $v = \sigma_i(u)$인 두 노드 $u = b_1b_2 \cdots b_i \cdots b_m$와 $v = b_ib_2 \cdots b_1 \cdots b_m$ 사이에 에지가 발생하며, $u$와 $v$를 연결하는 에지를 $i$-에지라고 한다. 하이퍼-스타는 매우 간단한 라우팅 알고리즘과 유용한 확장성을 가지고 있고, 이분할 연결망이며, 최대 고장 허용도를 가지고 있다[6]. 하이퍼-스타 $HS(m, k)$는 $m = 2k$일 때 정규연결망이고, 그렇지 않을 경우에는 비정규연결망이다. (그림 1)은 $HS(4, 1)$과 $HS(4, 2)$를 나타낸다.




(a) $HS(4, 1)$ (b) $HS(4, 2)$

(그림 1) $HS(4, 1)$와 $HS(4, 2)$

임의의 노드 $u$에서 치환 $\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \cdots, \sigma_{kt}$을 순차적으로 적용하여 정해지는 경로를 $[k_1, k_2, \cdots, k_t]$로 표시하겠다. 예를 들면 노드 0011에서 노드 1100으로 가는 경로는 [3, 2, 4] 혹은 [4, 2, 3]이다. 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$의 임의의 두 노드를 $u = a_1a_2 \cdots a_i \cdots a_{2n}$와 $v = b_1b_2 \cdots b_i \cdots b_{2n}$라고 하고, 두 노드 $u$와 $v$ 사이의 거리를 $dist(u, v)$라고 하면, $dist(u, v)$는 다음과 같다.

- $d(u_i, v_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } a_i \neq b_i, \\ 0 & \text{if } a_i = b_i. \end{cases}$
- $dist(u, v) = \sum_{i=2}^{2n} d(u_i, v_i)$

**[성질 1]** 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$의 임의의 두 노드를 $u = 0^n1^n$와 $v$라고 하자. 만약 $dist(u, v)$가 $m$이면, 노드 $u$로부터 노드 $v$를 연결하는 경로 상에 존재하는 임의의 노드 $v$는 레벨 $L_m$에 위치한다.

## 3. 서브그래프와 대칭성

3.1 하이퍼큐브의 서브그래프 : 하이퍼-스타 $HS(m, k)$

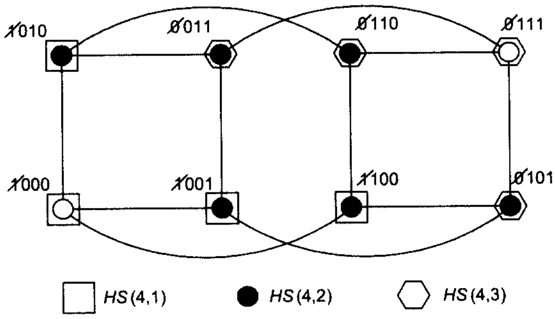
**[정리 1]** 하이퍼-스타 그래프 $HS(m, k)$는 $m$-1차원 하이퍼큐브의 서브그래프이다.

**[증명]** 하이퍼-스타 그래프와 하이퍼큐브의 각 노드는 2진수 "0"과 "1"을 순서 없이, 연속적으로 나열한 형태로 표현되어 있다. 하이퍼-스타 그래프 $HS(m, k)$의 각 노드는 $m$개의 비트스트링 $b_1b_2 \cdots b_i \cdots b_m$으로 표현되며, $|\text{"1"}| = k$이다. $b_1$과 $b_i$가 보수일 때 $b_1$과 $b_i$를 교환하는 치환을 $\sigma_i$라 하면, $v = \sigma_i(u)$인 두 노드 $u = b_1b_2 \cdots b_i \cdots b_m$와 $v = b_ib_2 \cdots b_1 \cdots b_m$ 사이에 에지가 발생한다. 하이퍼큐브의 각 노드는 $n$개의 비트스트링 $a_1a_2 \cdots a_i \cdots a_n$으로 표현되고, 두 노드 $s = a_1a_2 \cdots a_i \cdots a_n$와 $w = a_1a_2 \cdots \overline{a_i} \cdots a_n$ 사이에 에지가 발생한다. 하이퍼-스타 그래프에서 인접해 있는 두 노드의 첫 번째 비트를 제거하면 다음과 같이 표현할 수 있다. $u' = b_2 \cdots b_i \cdots b_m$이고, $v' = b_2 \cdots b_1 \cdots b_m$이다. $b_1$과 $b_i$가 보수 관계라고 했으므로, $v' = b_2 \cdots \overline{b_i} \cdots b_m$임을 알 수 있다. 첫 번째 비트를 제거한 두 노드 $u'$와 $v'$를 보면 노드 표현 형태와 노드와 노드를 연결하는 에지 발생 규칙이 하이퍼큐브와 동일함을 알 수 있다. 그리고 하이퍼-스타 그래프 $HS(m, k)$에서 $k = |\text{"1"}|$이라고 했으므로 첫 번째 비트를 제거한 하이퍼-스타 그래프 $HS(m, k)$의 $|\text{"1"}|$은 $k$이거나 $k$-1이다. $n(= m-1)$차원 하이퍼큐브에서 $|\text{"1"}|$이 $k$와 $k$-1인 노드들로 연결된 서브그래프를 구성하면 구성된 서브그래프는 하이퍼-스타 그래프 $HS(m, k)$와 동일함을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 하이퍼-스타 그래프 $HS(m,k)$는 $m$-1차원 하이퍼큐브의 서브그래프이다. □

$m$값이 동일한 하이퍼-스타 그래프들을 $HS(m, 1)$, $HS(m, 2)$, $\cdots$, $HS(m, i)$, $\cdots$, $HS(m, k)$이라고 하자($1 \le i \le k$). 각 $HS(m, i)$ 그래프들의 노드들 중에는 서로 다른 $HS(m, i)$에 속해 있지만 동일한 비트스트링을 갖는 노드들이 존재한다. 이와 같은 동일한 비트스트링을 갖는 노드들을 모두 겹쳐서 연결하면 $m$-1차원 하이퍼큐브를 생성한다. 예를 들면 $HS(4, 1)$과 $HS(4, 2)$에는 1010, 1001, 1100이 동시에 존재하고, $HS(4, 2)$와 $HS(4, 3)$에는 0011, 0110, 0101이 동시에 존재한다. $HS(4, 1)$과

$HS(4,2)$와 $HS(4,3)$에서 동시에 존재하는 노드들을 겹쳐서 연결하면 3차원 하이퍼큐브를 생성한다. 그러므로 하이퍼-스타 그래프 $HS(m,k)$는 아래와 같은 성질을 가짐을 알 수 있다.

**[성질 2]** $m$값이 동일한 하이퍼-스타 그래프 $HS(m,k)$들에 존재하는 동일한 비트스트링을 갖는 노드들을 모두 겹쳐서 연결하면 $m$-1차원 하이퍼큐브를 생성한다.




(그림 2) 3차원 하이퍼큐브 내부의 하이퍼-스타 그래프 $HS(4,1)$, $HS(4,2)$, $HS(4,3)$

### 3.2 노드 대칭성

연결망 $G$에 속한 어떤 노드에서도 $G$가 똑같이 보일 때 $G$는 노드 대칭적이라 한다. 즉, 연결망의 임의의 두 노드 $v$와 $w$에 대응시키는 자기동형(automorphism)이 존재하면 그 연결망은 노드 대칭적이다[1, 9]. 대칭성은 주어진 연결망으로 병렬 컴퓨터를 설계할 때 각종 자원의 관리를 쉽게 하고, 효율적이 라우팅을 설계할 수 있도록 한다. 하이퍼-스타 $HS(m,k)$는 비정규형 연결망이기 때문에 대칭성이 존재할 수 없으므로 $m=2k$인 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$에서 노드 대칭성이 존재함을 증명하겠다.

**[정의 1]** 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 노드 $u$를 정점으로 하는 트리를 매핑 트리 $T_u$라고 하면, $T_u$는 노드 $u$의 $n$개의 하위 노드 $c_1, \cdots c_n$으로 구성되고, $c_1$은 $n$-1개의 하위 노드 $g_1, \cdots, g_{n-1}$으로 구성된다.

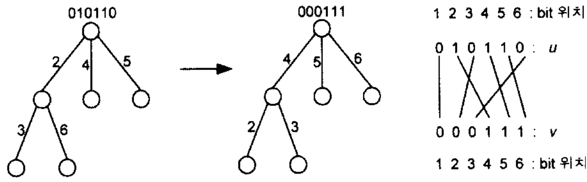
$i_j$-에지에 의해 $u$와 $c_j$가 연결되고 $i_{n+k}$-에지에 의해 $c_j$와 $g_k$가 연결되는 매핑 트리 $T_u$상에 존재하는 $i$-에지의 순서를 $I_u=(i_1, \cdots, i_{2n-1})$라고 하고, 마찬가지 방식으로 노드 $v$에 대한 $i$-에지의 순서를 $I_v=(i'_1, \cdots, i'_{2n-1})$라고 하자. 그러면 노드 $u$를 노드 $v$에 다음과 같은 알고리즘에 의해 매핑할 수 있다.

- 매핑 알고리즘

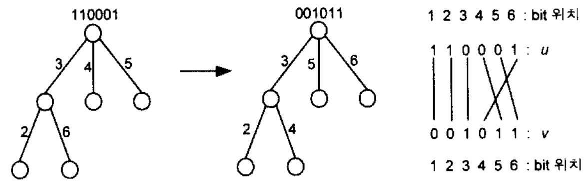
경우 1 : $u_1=v_1$이면 $u_1$은 $v_1$에 매핑하고, $u_{i_j}$는 $v_{i'_j}$에 매핑한다($i_j \in I_u$, $i'_j \in I_v$).

경우 2 : $u_1=\overline{v_1}$이면 $\overline{u_i}$은 $v_1$에 매핑하고, $\overline{u_{i_j}}$는 $v_{i'_j}$에 매핑한다($i_j \in I_u$, $i'_j \in I_v$).

주어진 매핑 알고리즘에 의해 노드 $u$가 $v$에 매핑함으로써 그래프의 자기동형이 존재한다는 것을 보이는 것은 매우 쉽다. $HS(6,3)$의 두 노드를 $u=010110$, $v=000111$이라고 하자. (그림 3)(a)는 매핑 트리 $T_u$와 $T_v$를 이용하여 노드 $u$가 노드 $v$에 매핑하는 것을 보여주고 있다. 그림을 보면 $T_u$로부터 $i$-에지의 순서 $I_u=(2,4,5,3,6)$를 얻을 수 있고, $T_v$로부터 $i$-에지의 순서 $I_v=(4,5,6,2,3)$을 얻을 수 있다. 그러면 노드 $u$는 매핑 알고리즘의 경우 1에 의해 노드 $v$에 매핑할 수 있다. 또 $HS(6,3)$의 두 노드를 $u=110001$, $v$=001011라고 할 때, (그림 3)(b)는 매핑 트리 $T_u$와 $T_v$를 이용하여 노드 $u$가 노드 $v$에 매핑하는 것을 보여준다. 그림을 보면 $T_u$로부터 $i$-에지의 순서 $I_u=(3,4,5,2,6)$을 얻을 수 있고, $T_v$로부터 $i$-에지의 순서 $I_v$=(3,5,6,2,4)를 얻을 수 있으므로 노드 $u$는 매핑 알고리즘의 경우 2에 의해 노드 $v$에 매핑할 수 있다. 주어진 매핑 알고리즘에 의해 노드 $u$가 $v$에 매핑함으로써 그래프의 자기동형이 존재한다는 것을 보였으므로 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.




(a)




(b)

(그림 3) 매핑 알고리즘에 의한 매핑 트리 : (a) $u$=010110, $v$=000111, (b) $u$=110001, $v$=001011

**[정리 2]** 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$은 노드 대칭이다.

매핑 알고리즘을 이용하여 임의의 두 노드 $u'$와 $v'$ 사이의 라우팅을 임의의 노드 $u$로부터 특정 노드 $v(=0^n1^n)$로의 라우팅으로 변환할 수 있다. 가령 $u'$로부터 $v'$에 이르는 경로를 $P=[p_1, p_2, \cdots, p_t]$라 하고, 노드 $u$로부터 $v$에 이르는 경로를 $Q=[q_1, q_2, \cdots, q_t]$라고 하자. 노드 $v'$와 $v$에 적용된 매핑 알고리즘에 의해 $p_i$가 $q_i$로 매핑 된다면 경로 $Q$를 경로 $P$로 변환할 수 있다. $HS(6,3)$의 두 노드를 001011과 010110이라고 하고, 두 노드 사이의 경로를 $P=[6,4,3,2]$라고 하자. 두 노드 010110과 000111 사이의 매핑은 (그림 3)(a)에서 보였다. 그러므로 경로 $P$는 두 노드 011001과 000111 사이의 경

로인 $Q=[3,5,2,4]$로 변환할 수 있다.

**[성질 3]** 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 임의의 노드를 $u=0^n1^n$라고 하면, $u$를 출발 노드로 하는 두 개의 경로 $P=[k_1,k_2,\cdots,k_t]$와 $Q=[h_1,h_2,\cdots,h_t]$가 있다고 하자. 경로 $P$와 경로 $Q$의 짝수 위치의 지수들이 순서에 상관없이 서로 같고, 홀수 위치의 지수들이 순서에 상관없이 서로 같으면 경로 $P$와 경로 $Q$에 의해 도착하는 노드는 동일하다.

**[정리 3]** 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 임의의 노드를 $u=0^n1^n$라고 하면, $L_{n-1}$의 노드들과 $L_n$의 노드들을 연결하는 에지들을 모두 제거한 후 발생하는 두 개의 부연결망($L_i(0\le i\le n-1)$의 노드들로 구성된 부연결망과 $L_j(n\le j\le 2n-1)$의 노드들로 구성된 부연결망)은 대칭이다.

**[증명]** 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 전체 노드수는 $\binom{2n}{n}$이다. 최단 경로를 구하기 위해 치환 $\sigma_i(n+1\le i\le 2n)$와 치환 $\sigma_{jj}$ $(2\le j\le n)$를 번갈아 적용하도록 한다. 이 때 동일 레벨에 위치한 노드들 사이에는 에지가 존재하지 않고, $|L_i-L_j|\ge 2$ 인 레벨 $L_i$와 $L_j$에 위치한 노드들 사이에도 에지가 존재하지 않는다.

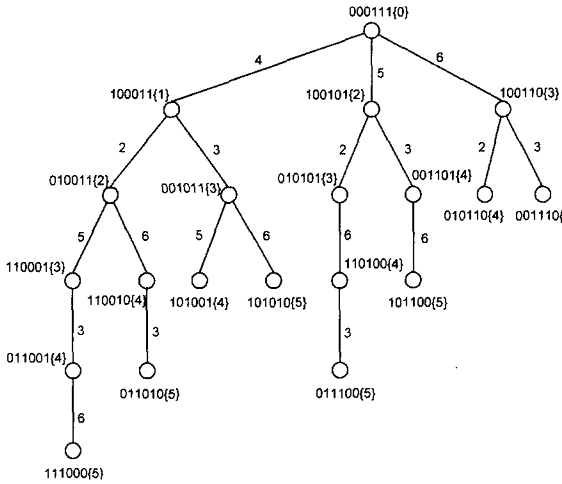
노드 $u=0^n1^n$와 레벨 $L_{2n-1}$에 위치한 노드 $v=1^n0^n$는 경로 $P=[n+1,2,n+2,3,\cdots,n,2n]$에 의해서 연결된다. 출발노드를 $u$로 하는 최단 경로는 치환 $\sigma_i(n+1\le i\le 2n)$와 치환 $\sigma_j(2\le j\le n)$를 번갈아 적용하여 구할 수 있다. 성질 2에 의해 경로 $P$와 짝수 위치의 지수들이 순서에 상관없이 서로 같고, 홀수 위치의 지수들이 순서에 상관없이 서로 같으면 출발노드 $u$로부터 동일한 목적노드에 이르는 또 다른 최단 경로 $[k_1,k_2,\cdots,k_t]$가 존재함을 알 수 있다. 레벨 $L_1$에 위치한 노드들은 노드 $u$와 치환 $\sigma_i$에 의해 연결되어 있고, 레벨 $L_{2n-2}$에 위치한 노드들도 노드 $v$ $(=\overline{u})$와 치환 $\sigma_i$에 의해 연결되어 있다. 레벨 $L_1$에 위치한 임의의 노드 $u'$ 는 레벨 $L_2$에 위치한 특정한 노드들 $u''\cdots u^+$과 치환 $\sigma_j$에 의해 연결되어 있고, 레벨 $L_{2n-2}$에 위치한 임의의 노드 $v'$ $(=\overline{u'})$도 레벨 $L_{2n-3}$에 위치한 특정한 노드들 $u''(=\overline{u''}),\cdots,u^+(=\overline{u^+})$과 치환 $\sigma_j$에 의해 연결되어 있다. 노드 $u$와 노드 $v$가 보수 관계에 있으므로 동일한 치환을 적용하여 발생하는 레벨 $L_i$에 위치한 노드들과 레벨 $L_{2n-i-1}(0\le i\le n)$에 위치한 노드들은 보수 관계에 있다. 각 노드의 분지수가 같으므로 레벨 $L_i$에서 발생하는 에지들과 레벨 $L_{2n-i-1}$에서 발생하는 에지들의 수와 연결관계가 동일하다. 그러므로 레벨 $L_i(0\le i\le n)$에 위치한 모든 노드들을 포함하고 레벨 $L_0$에 위치한 노드 $u$를 정점으로 하는 트리 $T_i$와 레벨 $L_j(n+1\le j\le 2n-1)$에 위치한 모든 노드들을 포함하고 레벨 $L_{2n-1}$에 위치한 노드 $v$를 정점으로 하는 트리 $T_j$는 같은 형태를 갖는다. 즉 트리 $T_i$와 $T_j$는 자기동형이다.

## 4. 방 송

$HS(2n,n)$의 방송을 위해 원시 노드 $u=0^n1^n$를 정점으로 하는 스패닝 트리를 만들겠다. $HS(2n,n)$ 구조는 스패닝 트리를 쉽게 만들 수 있다는 장점이 있다. $Pa(v)$는 노드 $v$의 상위 노드를 나타내는 함수라고 하고, $Ch(v)$는 노드 $v$의 하위 노드를 나타내는 함수라고 하자. 노드 $v$의 2차원 상위 노드를 $g=Pa(Pa(v))$라고 하고, $E=\{i\mid r_i=g_i\oplus v_i=1\}$라고 하자. $v$가 짝수 레벨에 위치해 있는 경우에는 $i^0\in E$과 $i^1\in E$은 $1\le i^0\le n$과 $n+1\le i^1\le 2n$이고, $v$가 홀수 레벨에 위치해 있는 경우에는 $i^0\in E$과 $i^1\in E$은 $1\le i^1\le n$과 $n+1\le i^0\le 2n$이다. 그리고 $\Psi=\{i^1+1,i^1+2,\cdots,2n\}$ 혹은 $\Psi=\{i^1+1,i^1+2,\cdots,n\}$인 $\Psi$에 속하는 모든 $h$에 대해 $r_h=0$이다. 즉, $\Psi$는 $R$의 $i^1$의 위치로부터 연속적으로 0이 위치하는 집합을 나타낸다.

**[정의 2]** 원시 노드를 노드 $u=0^n1^n$라고 할 때, $Pa(v)$과 $Ch(v)$에 의해 노드 $u$를 정점으로 하는 스패닝 트리 $ST(u)$를 다음과 같이 정의한다.

- $Ch(v)=\sigma_h(v)$, 모든 $h\in\Psi$,
- $Pa(v)=\sigma_{i^0}(v)$




(그림 4) 노드 $u$=000111를 정점으로 하는 $HS(6,3)$의 스패닝 트리

특히, 원시 노드 $u$가 $v$일 때는 $i^1=n$이고, $Pa(v)$는 존재하지 않으며, $i^0=1$이고, $E=\{i\mid r_i=u_i\oplus v_i=1\}$라고 가정한다. 그러면 $v$의 하위 노드는 $h$-에지에 의해 연결되는 노드이고, $v$의 상위 노드는 $i^0$-에지에 의해 연결되는 노드임을 쉽게 알 수 있다. (그림 4)는 노드 $u$를 정점으로 하는 $HS(6,3)$의 스패닝 트리 $ST(000111)$이다. (그림 4)에서 보면 $L_2$에 위치

한 노드 010011을 $\upsilon$라고 할 때, $\upsilon$의 2차원 상위 노드는 000111이고, $E=\{2,4\}$임을 알 수 있다. 또 $\upsilon$가 짝수 레벨에 위치해 있으므로, $i^0=2$이고 $i^1=4$이며 $\Psi=\{5,6\}$임을 알 수 있다. 그러므로 $\upsilon$의 하위 노드는 $\sigma_5(\upsilon)=110001$과 $\sigma_6(\upsilon)=110010$이며, $\upsilon$의 상위 노드는 $\sigma_2(\upsilon)=100011$이다.

**[정리 4]** 원시 노드 $u=0^n1^n$이면, 스패닝 트리 $ST(u)$의 최적 높이는 $2n-1$이다.

**[증명]** 스패닝 트리 $ST(u)$ 안의 임의의 노드를 $w$라고 하면, 노드 $u$와 $w$ 사이에 Exclusive-OR 함수를 적용하여 생성된 비트스트링을 $R=r_1r_2\cdots r_{2n}$이라고 하고, $r_i=u_i\oplus w_i$인 비트들의 집합을 $R^*$라고 하자. 그러면 함수 $Pa(w)$는 $i^0\in R^*$인 상위노드 $\sigma_{i^0}(w)$를 나타낸다. 성질 1에 의해 에지 $(w, Pa(w))$는 노드 $u$로부터의 최단거리를 이끌어 낸다. $HS(2n,n)$은 노드 대칭이므로, $ST(u)$의 높이는 $HS(2n,n)$의 지름과 동일하다. 특히 $w=1^n0^n$일 때, $ST(u)$의 노드 $u$와 $w$를 연결하는 길이 $2n-1$인 최단 경로를 구성한다. 그러므로 스패닝 트리 $ST(u)$의 최적 높이는 $2n-1$이다.

본 논문에서는 일-대-다 방송 기법을 제안하겠다. 방송 기법은 다음과 같다.

먼저 원시 노드 $u$가 가지고 있는 정보 $M$을 하위 노드 중 가장 왼쪽에 위치한 하위 노드에 전달한다. 그러면 $u$와 $u_1$이 정보 $M$을 가지고 있게 된다. 두 번째로 원시 노드 $u$가 가지고 있는 정보 $M$을 하위 노드 중 $u_1$의 오른쪽에 위치한 하위 노드에 전달하고, 동시에 $u_1$은 $u_1$의 하위 노드 중 가장 왼쪽에 위치한 하위 노드에 정보 $M$을 전달한다. $ST(u)$의 모든 노드에 정보 $M$이 전달될 때까지 이와 같은 방송을 계속 수행한다. 제안한 방송 기법의 수행 시간은 $2n-1$이며, 이것은 $HS(2n,n)$의 지름과 같으므로 최적 방송임을 알 수 있다. (그림 4)에 표시한 $\{t\}$는 노드가 $t$ 시간 만에 정보를 전달받는다는 것을 나타낸다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 상호 연결망으로 널리 알려진 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$가 하이퍼큐브의 서브그래프라는 것과 노드 대칭성을 가짐을 보였고, $L_{n-1}$의 노드들과 $L_n$의 노드들을 연결하는 에지들을 모두 제거한 후 발생하는 두 개의 부연결망($L_i(0\le i\le n-1)$의 노드들로 구성된 부연결망과 $L_j(0\le j\le 2n-1)$의 노드들로 구성된 부연결망)이 대칭임을 보였다. 또한 $HS(2n,n)$의 스패닝 트리를 이용한 일-대-다 방송 기법을 제안하였고, 최적 방송 수행 시간이 $2n-1$임을 보였다.

이와 같은 결과는 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$에서 노드의 부하를 다른 노드들에게 동일하게 분산할 수 있도록 해서 부하가 한 노드에 집중되지 않도록 할 수 있는 장점이 있다는 것과 각종 자원의 관리를 쉽게 할 수 있다는 것을 보여주는 것이다. 그리고 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 일-대-다 방송 기법이 최적 방송 기법임을 증명하는 것이며, $HS(2n,n)$에서의 실제 통신 시간을 알 수 있음을 보여주는 것이다. 또한 향후 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 다양한 위상적 망성질 분석과 combinatorial 성질 분석 및 다-대-다 방송 기법 등을 분석하는 데 유용한 연구 자료가 될 것이다.

## 참 고 문 헌


[1] S. B. Akers, D. Harel and B. Krishnamurthy, "The star graph : An attractive alternative to the $n$-cube," Proc. of the Int. Conf. Parallel Processing, pp.216-223, 1986.

[2] D-R. Duh, G-H. Chen and J-F. Fang, "Algorithms and Properties of a New Two-Level Network with Folded Hypercubes as Basic Modules," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.6, No.7, pp.714-723, July, 1995.

[3] A. H. Esfahanian, L. M. Ni and B. E. Sagan, "The Twisted N-Cube with Application to Multiprocessing," IEEE Trans. Comput., Vol.40, No.1, pp.88-93, Jan., 1991.

[4] S. L. Johnsson, "Communication Efficient Basic Linear Algebra Computations on Hypercube Architectures," Journal of Parallel Distributed Comput., Vol.4, pp.133-172, 1987.

[5] J. Kim and K-G. Shin, "Operationally Enhanced Folded Hypercubes," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.5, No.12, pp.1310-1316, 1994.

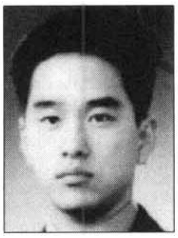
[6] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph : A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002, LNCS 2510, pp. 858-865, 2002.

[7] F. T. Leighton, "Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes," Morgan Kaufmann Publishers, 1992.

[8] V. E. Mendia nad D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.3, No.4, pp.389-396, 1992.

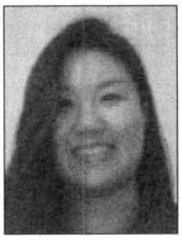
[9] A. S. Vaidya, P. S. N. Rao and S. r. Shankar, "A Class of Hypercube_like Networks," Proc. of the 5th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing, pp. 800-803, 1993.

[10] S.-K. Yun and K.-H. Park, "Comments on Hierarchical Cubic Networks," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.9, No.4, pp.410-414, 1998.



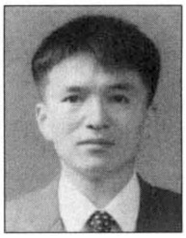
김 종 석

e-mail : rockhee@sunchon.ac.kr
1995년 순천대학교 전자계산학과(학사)
2001년 순천대학교 컴퓨터과학과(석사)
2004년 순천대학교 컴퓨터과학과(이학박사)
현재 순천대학교 컴퓨터과학과 Postdoctoral
관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 그래프이론, 상호연결망, 계산이론, 광 네트워크



오 은 숙

e-mail : eunseuko@hotmail.com
1994년 한림대학교 전자계산학과(학사)
1996년 이화여자대학교 전자계산학과(석사)
2004년 Texas A&M University 컴퓨터과학과(이학박사)
현재 Virginia Commonwealth University Postdoctoral
관심분야 : 그래프이론, 상호연결망, 고장허용 라우팅 알고리즘, Ad-hoc & 광 네트워크



이 형 옥

e-mail : oklee@sunchon.ac.kr
1994년 순천대학교 전자계산학과(학사)
1996년 전남대학교 전산통계학과(석사)
1999년 전남대학교 전산통계학과(이학박사)
1999년~2002년 한국전산원 선임연구원
2002년~현재 순천대학교 컴퓨터교육과 조교수
관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 그래프이론, 상호연결망, 계산이론