

저주파 필터를 이용한 Wegmann 방법의 개량에 관한 연구

송 은 지[†]

요 약

2차원 Laplace 방정식이 나타나는 열전도, 정전(靜電)potential, 유체(流體)의 문제 등에 등각사상이 유용하게 쓰이고 있다. 단위원 내부로부터 Jordan 영역 내부에로의 수치등각사상을 구하는 것은 비선형 적분방정식인 Theodorsen 방정식을 푸는 것으로 귀착된다. 저자는 Theodorsen 방정식을 구하는 해법 중 유효한 해법의 하나로 알려진 Hübner의 방법을 소개하고 개선한 바 있다[1, 2]. 여기서는 계산량에 있어서 Hübner보다 유리한 Wegmann의 방법을 다룬다. Wegmann 방법에 의해 계산기상에 실현한 결과 난이도가 높은 문제에서는 수렴했다가 발산하는 문제점이 지적되었다. 본 논문에서는 Wegmann의 문제점을 이론적으로 분석하여 저주파필터에 의하여 개선한 방법을 제안하고 개선한 방법에 의한 수치 실험결과를 보고한다.

A Study on Improvement of Wegmann's method by Low Frequency pass Filter

Eun-Jee Song[†]

ABSTRACT

Conformal mapping is useful to solve problems in heat conduction, electrostatic potential and fluid flow involving Laplace's equation in two independent variables. Determinations of conformal maps from the unit disk onto a Jordan region eventually requires solving the Theodorsen equation which is in general nonlinear with respect to the boundary correspondence function. Hübner's method which has been well known for the efficient method among the many suggestions for the Theodorsen equation, was improved in early study[1, 2]. In this paper Wegmann's method is treated that is more efficient in computation cost rather than Hübner's. But we found that a question which is divergent in some difficult problems by numerical experiment of Wegmann's iteration. We analyze theoretically the cause of divergence and propose an improved method by applying a low frequency filter to the Wegmann's method. Numerical experiments by our improved method show convergence for all divergent problems by Wegmann's method.

키워드: 수치등각사상(Numerical conformal mapping), Theodorsen 방정식(Theodorsen's equation), Wegmann 방법(Wegmann's method), 저주파필터(Low frequency pass filter)

1. 서 론

등각사상은 함수론의 기본적인 문제의 하나로 물리학, 공학등에 응용되고 있다. 일반적으로 등각사상은 수치계산법에 의해 구할 수 있으며 여기에는 표준영역에서 문제영역에로의 사상과 표준영역에서 문제영역에로의 사상을 구하는 것으로 대별되어 각각 독립된 분야로서 연구되고 있다. 그것은 표준영역에서 문제영역에로의 사상결정은 비선형방정식을 풀어야 하며 문제영역에서 표준영역에로의 사상결정은 선형방정식을 풀어야 하기 때문이다. 그러나 같은 해법으로 양방향에로의 등각사상을 구하는 방법도 시도되고 있다[3].

여기서는 표준영역인 단위원의 내부에서 문제영역인 Jordan 영역 내부에로의 수치등각사상을 다루는데 이사상의 결정은 경계대응함수에 관한 비선형 적분방정식인 Theodorsen 방정식을 푸는 것으로 귀착된다[6].

저자는 기존의 여러 Theodorsen 방정식의 해법중 오차, 계산코스트면에서 비교적 뛰어나다고 인정되고 있는 Hübner의 방법에 대하여 연구 한 바 있다[1, 2]. 본 논문에서는 계산량에 있어 좀더 유리한 Wegmann의 방법을 다룬다. 이것은 반복법의 주요부가 되는 공역작용소의 계산횟수가 Hübner보다 Wegmann의 방법이 적기 때문이며 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용한 반복법의 계산량은 <표 1>에 나타나 있다.

그러나 Wegmann의 방법으로 수치실험을 한 결과 난이도가 높다고 예상되는 문제에 있어 수렴했다가 발산을 하는

[†] 종신회원 : 남서울대학교 컴퓨터학과 교수
논문접수 : 2001년 6월 1일, 심사완료 : 2001년 9월 21일

〈표 1〉 수치해법의 비교(FFT 이용) N : 표본수

제안자	1회반복의 계산량	수렴속도	해법
Hübner	$3N \log_2 N$	2 차	Newton법
Wegmann	$2N \log_2 N$	2 차	Newton법

불안정현상이 나타났다. 본 논문에서는 수렴하지 않는 불안정현상의 원인을 이론적으로 분석하여 반복법의 안정화를 위해 저주파필터를 적용한 새로운 반복법을 제안하며 수치 실험한 결과 발산하는 모든 문제에 있어서 수렴하였기에 그 결과를 보고한다. 또한 이것은 논문1에서 저주파필터의 적용이 Hübner뿐만아니라 Theodorsen방정식의 그 외의 해법에도 유효할 것이라는 예상이 입증된 셈이라 할 수 있다.

2. Wegmann의 방법

이하 D 를 단위원 내부, Jordan 폐곡선 내부를 Δ 로하고 ϕ 는 D 에서 Δ 에로의 등각사상으로 다음과 같은 정규화 조건을 만족하는 사상이라 하자.

$$\phi(0)=0, \phi'(0)>0 \tag{1}$$

여기서는 문제영역이 $\eta(t)=\rho(t)e^{it}$ 로 극좌표 표현되는 영역만을 취급하기로 하고 함수 G 를 도입하여 다음과 같이 정의한다.

$$G\tau(t) := \log \rho(\tau(t)+t) + it \tag{2}$$

그러면

$$Re G\tau(t) = \log \rho(\tau(t)+t), Im G\tau(t) = \tau(t)$$

이 되며 등각사상이라는 조건하에

$$\mathcal{P}\tau(t) = \tau(t) - K \log \rho(\tau(t)+t) = 0 \tag{3}$$

과 같은 Theodorsen방정식을 얻을 수 있다. 여기서 K 는 공역작용소(共役作用素)라 불리우며

함수 f 가

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt} \quad \hat{f}_k : f \text{의 } k\text{번째 Fourier계수}$$

로 전개되었을 때

$$Kf \sim -i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sign}(k) \hat{f}_k e^{ikt}$$

로 정의되는 작용소이다. 자세한 Theodorsen 방정식의 유도과정은 논문1에 서술되어 있으므로 여기서는 생략하기로

한다.

Wegmann은 원래의 비선형 방정식 (3)을 다음과 같은 Newton법으로 풀었다.

$$\mathcal{P}\tau_m(t) + \mathcal{P}_{r_m} \delta_m(t) = 0 \tag{4}$$

$$\tau_{m+1}(t) = \tau_m(t) + \delta_m(t)$$

$\mathcal{P}_{r_m} : \tau_m$ 에서 \mathcal{P} 의 Frechet미분 $m=0, 1, 2, \dots$ (반복횟수)

Wegmann의 방법은 Theodorsen방정식의 잔차(殘差) $\mathcal{P}(\tau_k)$ 를 계산할 필요가 없기 때문에 Hübner의 방법에 비교하여 공역작용소의 계산이 1회 적어진다. 수치계산을 하기 위해 이산화를 하는데 편의상 짝수 표본점 $N=2n$ 을 사용하여

$$t_j = 2\pi j/N, \quad t = (t_0, t_1, \dots, t_{N-1})^T$$

로 하고 t 의 함수인 f 를 t_j 상에서 표본화한 것을

$$f_j := f(t_j), \quad f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$$

로 한다. 또한 어떤 스칼라 함수 $\sigma(y)$ 와 벡터 $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T$ 에 대하여

$$\sigma(y) = (\sigma(y_0), \sigma(y_1), \dots, \sigma(y_{N-1}))^T \text{로 정의한다}$$

공역작용소(共役作用素) K 는 다음과 같이 이산화 한다[8].

$$x \rightarrow F_N (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n; \quad b_1, b_2, \dots, b_{n-1})^T$$

$$y \rightarrow F_N^{-1} (0, -b_1, \dots, -b_{n-1}, 0; \quad a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T$$

F_N : 이산형 Fourier 변환

F_N^{-1} : 이산형 Fourier 역변환,

\hat{K}_N : 공역작용소에 의한 Fourier계수 변환

즉, 이산화된 공역작용소는

$$K_N := F_N^{-1} \hat{K}_N F_N$$

이 된다. Wegmann은 Newton 반복법 (4)의 수정량을 구하기 위한 문제를 계산량과 기억용량을 절약하기 위해 Riemann-Hilbert 문제로 귀착시켜 풀었는데 반복법은 간단히 다음과 같다[7, 9].

다음의 반복법에서 (4)의 해인 r 에 대하여 $s = r + t$ 이다.

<반복법>

$s_0 \in R^N$: 초기치 $m \geq 0$ 에 대하여

$$\theta(s_m) := \arg \eta(s_m)$$

$$v := \theta(s_m) - t$$

$$w := K_N v$$

$$\alpha := \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \nu_{\mu}, \quad \beta := \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} (-1)^{\mu} \nu_{\mu}$$

$$q := \text{Im}(\exp(w - i\theta(s_m)) \cdot \eta(s_m))$$

$$p := K_N q$$

$$\hat{q} := \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} q_{\mu}$$

$$s_{m+1} := s_m - Re \frac{\eta(s_m)}{\eta'(s_m)} - \frac{p + \hat{q} \cot \alpha + \beta \cos n t}{r(s_m) \exp(w)} \quad (5)$$

여기서 이산화한 공역작용소 $K_N f$ 는 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용하여 $O(N \log_2 N)$ 의 효율적인 계산량으로 계산할 수 있다[8]. 위의 Wegmann 반복법에 의해 수치실험을 한 결과 난이도가 높아짐에 따라 수렴을 한 후 발산을 거나 수렴하지 않는 경우가 있다는 문제점이 발견되었다(그림 1) 참조. 다음 장에서 이 문제점에 대한 분석을 서술한다.

3. Wegmann 법의 수렴성 분석

Wegmann의 반복법 (5)를 간단히

$$s_{m+1} = W(s_m), \quad m \geq 0 \quad (6)$$

로 하고 분석하기로 한다.

$\delta_m = s_{m+1} - s_m$ 로 하면

$$\begin{aligned} \delta_{m+1} &= s_{m+2} - s_{m+1} = W(s_{m+1}) - s_{m+1} \\ &= W(s_m + \delta_m) - s_{m+1} \approx W(s_m) + W_{s_m} \delta_m - s_{m+1} \quad (7) \\ &= W_{s_m} \delta_m \approx W_s \delta_m \end{aligned}$$

로 근사한다. 여기서 W_{s_m} 는 W 의 s_m 에서의 미분이며 W_s 는 참값 s 에서의 미분이다. 결국 반복횟수 m 이 커짐에 따라 $\|\delta_{m+1}\|/\|\delta_m\|$ 는 W_s 의 스펙트럼 반경에 근접해 간다. 그러므로 이 스펙트럼반경이 1보다 크면 수정량이 점점 증가하여 수렴하지 않게 된다. 여기서 문제영역이 단위원에 가까울 경우에 W_s 의 스펙트럼 반경을 실제로 평가해 보기로 한다. 문제영역의 경계

$$\begin{aligned} \eta(t) &= (1 + \xi(t))e^{it} \quad \xi(t) \in C^2_R(T) \quad (8) \\ (C^2_R(T) : 2\text{회 미분 가능한 주기 } 2\pi \text{인 연속함수}) \end{aligned}$$

로 표현되는 영역이라 하자. 노름(norm)은

$$\|\xi\| := \|\xi\|_{\infty} + \|\dot{\xi}\|_{\infty} + \|\ddot{\xi}\|_{\infty}$$

로 정의하고 식 (8)에서의 $\|\xi(t)\|$ 은 충분히 작다고 가정한다.

이때 W_s 를 계산하면

$$W_s(u) = -Y(\xi, u) + O(\xi^2) \approx -Y(\xi, u) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Y(u) &= \xi(u) \cdot K_N u + u \cdot K_N \xi(t) \\ &\quad + K_N((K_N \xi(t)) \cdot K_N u - \xi(t) \cdot u) + J_0(\xi(t))J_0(u)1 \\ &\quad - ((I + K^2_N)\xi(t)) \cdot u - K_N(((I + K^2_N)\xi(t)) \cdot K_N u) \end{aligned}$$

로 된다[7].

여기서 $J_0(f) = \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} f_{\mu}$ 이며 기호 \cdot 는 벡터의 요소간의 곱을 나타내고 $1 = (1, \dots, 1)^T$ 이다. $\|\xi\|$ 가 충분히 작으면 식 (8)의 $\|Y(u)\|$ 은 1보다 작아져서 수렴성이 보장된다[7].

특히 $\xi(s) = R \cos ls$ ($0 \leq R < 1, 1 \leq l < n$)의 경우 Y 를 계산하면 다음과 같다.

$$Y(\cos \nu t) = \begin{cases} 0 & : \nu = 0, \dots, n-l-1 \\ Rl \cos n t & : \nu = n-l \\ 2Rl \cos(N-l-\nu) t & : \nu = n-l+1, \dots, n \end{cases} \quad (10)$$

$$Y(\sin \nu t) = \begin{cases} 0 & : \nu = 0, \dots, n-l \\ -2Rl \sin(N-l-\nu) t & : \nu = n-l+1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Y 의 스펙트럼 반경은

$$\|Y\|_{\infty} = \begin{cases} \sqrt{2}R & : l=1 \\ 2Rl & : l=2, 3, \dots, n-1 \end{cases}$$

이다. 이것은 이산화한 반복법이 1차 수렴한다는 것을 말해 준다. 따라서 이론적으로 2차수렴 하는 것으로 알려진 Newton법인 Wegmann 방법이 선형수렴하는 것은 이산화 때문이라는 것을 알 수 있다.

4. 저주파 필터에 의한 안정화

식 (7)에서 알 수 있었듯이 W 의 s 에서의 미분 W_s 의 스펙트럼 반경은 반복법의 점근적 수렴비율이다. 문제를 간단히 하기 위해 식 (9)의 $O(\xi^2)$ 항을 무시하면 식 (10)에서 알 수 있듯이 W_s 은 주파수 $n-l$ 미만의 성분에 대하여는 영작용소(零作用素)이므로 반복법이 수렴하지 않는 원인은 주파수 $n-l$ 이상의 고주파 성분 때문임을 알 수 있다. 이것은 다음에 정의하는 저주파 필터(low frequency pass filter)에 의해 반복법의 근사치 s_m 가 움직이는 공간을 제한하면 수렴성을 개선할 수 있음을 암시하는 것이다.

저주파 필터 $L_k(e^{imt})$ 를

$$L_k(e^{imt}) = \begin{cases} e^{imt} & : 0 \leq |m| \leq n-k \\ 0 & : n-k < |m| \leq n \end{cases} \quad (11)$$

로 정의한다. 여기서 k 는 뒤에서부터 몇 개의 고주파 성분을 제거할까를 나타내는 파라미터이다.

식 (11)에서 정의한 저주파 필터 L_k 를 위의 Wegmann의 반복법 (6)에 적용시켜 새로운 근사값 s_{m+1} 을

$$s_{m+1} = L_k(W(s_m)), \quad m=0,1,2,\dots \quad (12)$$

로 정의하면

$$(L_k W)_s(u) = -L_k Y(u) + O(\xi^2)$$

이 되며 $k=l+1$ 로 하면

$$\begin{aligned} L_{l+1} Y(\cos \nu t) &= 0 & : \nu=0,1,\dots,n \\ L_{l+1} Y(\sin \nu t) &= 0 & : \nu=1,2,\dots,n-1 \end{aligned} \quad (13)$$

이 되므로 $(L_k W)_s$ 의 주요부 $L_k Y$ 은 영작용소(零作用素)가 되어 수렴성이 개선된다. 여기서 주목할 점은 $k=l+1$ 은 표본수 N 에는 의존하지 않는다는 것이다. 그러므로 오차를 줄이기 위해 표본수를 늘려간다고 하면 미리 적은 수의 표본수에서 저주파 필터의 파라미터를 정할 수 있다. 실제로 식 (12)에서 정의한 저주파필터에 의한 새로운 반복법으로 수치실험을 한 결과 반복법이 안정이 되어 Wegmann에 의한 반복법으로는 수렴하지 않는 모든 문제에 있어서 수렴하였기에 그 결과를 5장에 제시한다.

5. 수치실험

계산 예로서는 등각사상의 문제영역을 편심원(偏心圓)으로 하였는데 이것은 등각사상이 알려져 있어 오차의 평가가 용이한 고전적인 예이기 때문이다. 주어진 조건과 구하고자 하는 해는 다음과 같다.

경계가 $\eta(s) = \rho(s)e^{is}$ 로 극좌표 표현되었을 때
주어진 조건은 $\rho(s) = \frac{r \cos s + \sqrt{1-r^2 \sin^2 s}}{r+1}, \quad 0 \leq r < 1$

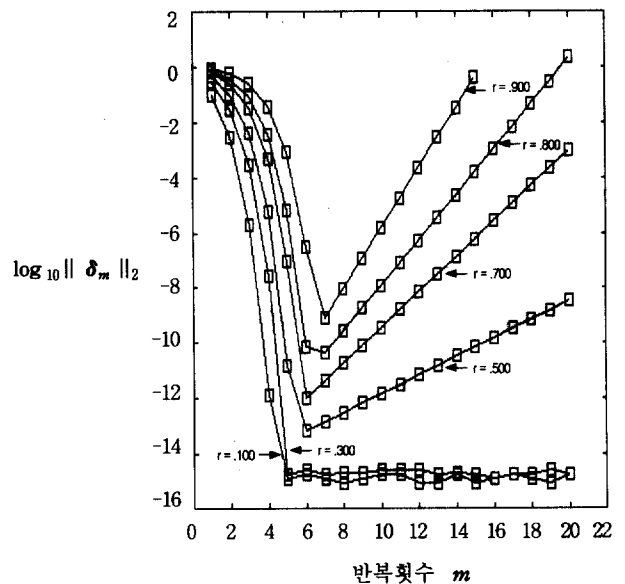
이고

구하고자 하는 해는 $s(t) = \arctan \frac{r \sin t}{1-r \cos t}$ 이다.

수치실험의 예인 편심원은 형상 파라미터 r 이 1에 가까울수록 영역의 모양이 복잡해져서 난이도가 높아지는 영역

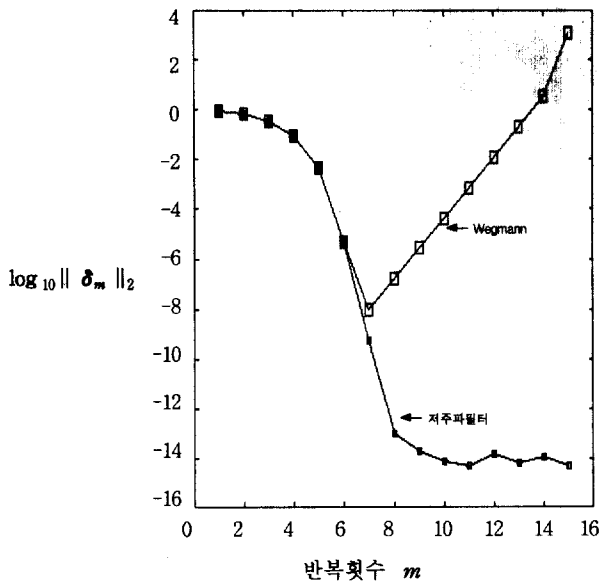
이다. 초기치로서는 $s_0 = (t_0, t_1, \dots, t_{N-1})^T, t_j = 2\pi j/N$ 로 하였고 수치계산은 FORTRAN90 배정도(double precision)를 사용하였다. 실험 결과를 나타내는 표에서 기호의 의미는 다음과 같다.

- m : 반복횟수
- r : 문제영역 형상 파라미터
- N : 이산화한 표본수
- k : 저주파필터의 파라미터
- $\|\delta_m\|_2 = \|s_m - s_{m+1}\|_2$: 수정량

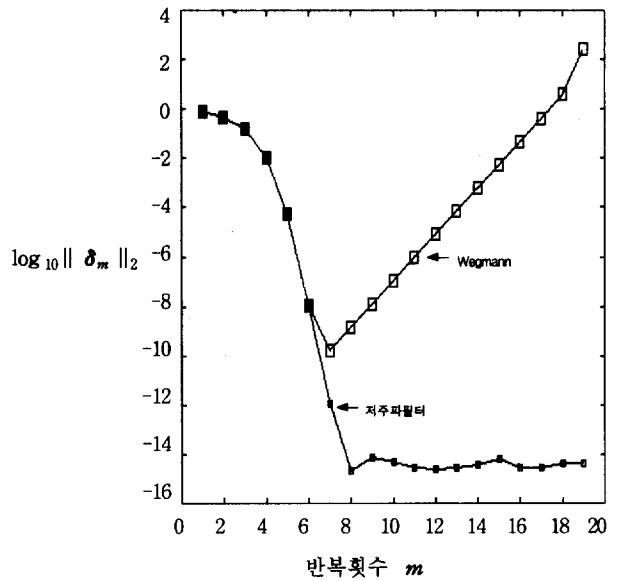


(그림 1) Wegmann 방법에 의한 수정량

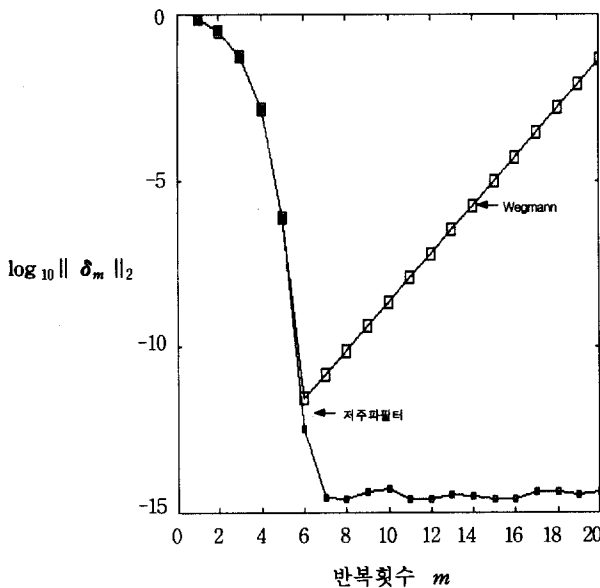
(그림 1)은 Wegmann이 제안한 반복법으로 수치실험을 한 결과로서 반복횟수에 따른 수정량을 나타낸 것이다. 그림1에서 알 수 있듯이 편심원의 형상 파라미터 r 이 약 0.5 이상이 되면 일단 수렴했다가 발산하는 현상이 나타났다. 이러한 현상이 나타난다는 것은 해를 구할 수 없다는 것이기 때문에 논문1에서 다른 Hübner방법에서 수렴속도가 느리다는 문제점보다 훨씬 치명적인 것이다. 그러나 본 연구에서 제안한 저주파필터를 적용한 반복법에 의해 수치실험을 한 결과 이러한 발산하는 현상을 막을 수 있었다. (그림 2)에서 처럼 $r=0.75$ 일 때 Wegmann이 제안한 방법으로는 6회 반복 후부터 수정량이 커져서 발산하는 반면 저주파필터를 적용한 방법으로는 7회에 수렴하고 그 이후도 반복법의 안정성을 보이고 있다. 문제의 난이도가 좀더 높은 $r=0.85$ 일 때와 $r=0.93$ 일 때 역시 (그림 3)과 (그림 4)에서 알 수 있듯이 Wegmann의 방법으로는 발산하지만 저주파필터를 적용한 방법에 의하면 반복법이 안정이 되어 발산하는 현상을 막을 수 있었다.



(그림 2) $r=0.75$ 일 때 Wegmann 과 저주파필터 방법에 의한 수정량 비교



(그림 4) $r=0.93$ 일 때 Wegmann 과 저주파필터 방법에 의한 수정량 비교



(그림 3) $r=0.85$ 일 때 Wegmann 과 저주파필터 방법에 의한 수정량 비교

6. 결 론

단위원 내부로부터 Jordan영역 내부로의 수치등각사상을 구하는 것은 Theodorsen 방정식을 푸는 것으로 귀결된다. 이 방정식에 관한 해법 중 Newton법인 Hübner의 방법에 대하여 논문1에서 다룬 바 있다. 본 논문에서는 계산량에서 좀더 유리한 Wegmann의 방법을 다루었는데 수치실험 결과 처음에는 수렴했다가 발산하여 결국 해를 구할 수 없는 치명적인 문제점이 발견되었다. 본 논문에서는 이산화한 Wegmann의 반복법을 이론적으로 분석하여 발산하는 현상

의 원인을 찾아 저주파필터를 적용한 반복법을 제안하였다.

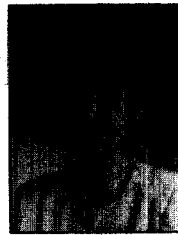
Wegmann방법으로는 난이도가 높은 문제일수록 쉽게 발산하는데 저주파 필터에 의해 개량한 방법으로 수치실험을 한 결과 모든 발산하는 문제에 대하여 수렴을 하여 해를 구할 수 있었다.

실제로 저주파필터는 Hübner의 방법에도 적용하여 수렴속도를 개선한 바 있는데 본 연구에서는 발산하는 문제점을 갖고 있는 Wegmann의 반복법을 이론적으로 분석하여 저주파 필터의 유효성을 밝혔다는 점에서 그 의의가 크다고 사료된다. 또한 논문 1에서 저주파필터가 Hübner이외의 Theodorsen 방정식의 해법에 유효할 것이라는 예상이 입증된 셈이다.

참 고 문 헌

- [1] 송은지, “등각사상에 있어 Theodorsen방정식의 고속해법”, 한국정보처리학회논문집, 제5권 제2호, pp.372-379, 1998.
- [2] 송은지, “Hübner 방법에 기초한 수치등각사상의 자동화 알고리즘”, 한국정보처리학회논문집, 제6권 제10호, pp.2716-2722, 1999.
- [3] 天野 要, “代用電荷法に基づく双方向的な數値等角寫像の方法”, 日本情報處理學會論文集, Vol.31, No.5, pp.623-632, 1990.
- [4] 송은지, “저주파 Filter를 이용한 Hübner반복법의 자동화 알고리즘”, '98 추계학술대회논문집, pp.98-108, 1998.
- [5] 송은지, “등각사상의 고속해법 개량에 관한 연구”, 한국정보처리학회 '97 춘계학술대회논문집, pp.905-910, 1997.
- [6] Gutknecht, M. H. “Numerical conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation,” J. Comput. Appl. Math. 14, No.1,2, pp.31-77, 1986.

- [7] Wegmann, R., "Discretized versions of Newton type iterative methods for conformal mapping," J. Comput. Appl. Math.29, No.2, pp.207-224, 1990.
- [8] Gutknecht, M. H. "Fast Algorithm for the conjugate Periodic Function," J. Computing No.22, pp.79-91, 1979.
- [9] Wegert, E. "An iterative method for solving nonlinear Riemann-Hilbert problems," J. Comput. Appl. Math.29, No.29, pp.311-327, 1990.
- [10] Wegmann, R., "Convergence proofs and error estimates for an iteration method for conformal mapping," Numer. Math. 44, pp.435-461, 1984.
- [11] Hübner, O., "The Newton method for solving the Theodorsen integral equation," J. Comput. Appl. Math.14, No.1,2, pp.19-29, 1986.



송은지

e-mail : sej@nsu.ac.kr

1984년 숙명여자대학교 수학과(이학사)

1988년 일본 나고야(名古屋)국립 대학 정보
공학과(공학석사)

1991년 일본나고야(名古屋)국립대학 정보
공학과(공학박사)

1991년~1992년 일본 나고야(名古屋)국립대학 정보공학과 객원
연구원

1993년~1995년 연세대학교 전자계산학과 시간강사

1993년~1995년 상지대학교 병설 전문대학 전자계산학과 전임
강사

1996년~현재 남서울대학교 컴퓨터학과 조교수

관심분야 : 수치해석, 컴퓨터 그래픽스 등.