

# (n,k)-스타 그래프의 사이클 특성

장 정 환†

요 약

본 논문에서는 최근 상호연결망 위상으로 관심을 받고 있는 (n,k)-스타 그래프에 대한 사이클 특성을 분석한다. (n,k)-스타 그래프의 그래프 이론적 특성을 바탕으로 (n,k)-스타 그래프가 다양한 종류의 사이클들을 보유하고 있는 범사이클(pancyclic) 특성을 지니고 있음을 밝히고 해당 사이클들을 찾을 수 있는 알고리즘을 제시한다.

본 논문에서 제안하고 있는 기법은 그래프 자체의 재귀적 성질을 이용한 하향식(top-down)방식으로써 부-그래프들로 구성된 확장된 개념의 사이클들에 “차원확장”이라는 연산을 연속적으로 적용함으로써 원하는 사이클로 구체화해 가는 과정으로 진행하게 된다. 이러한 기법의 적용 결과 구성되는 사이클은 최소한의 한정된 부-그래프들로 밀집되어 모이는 경향이 있어 노드 또는 에지상에 서로 중복이 없이 독립된(disjoint) 사이클을 찾는 문제 등의 응용분야로 확대적용의 가능성이 있다.

본 연구 결과는 (n,k)-스타 그래프에 대한 그래프 이론적 관점에서의 범사이클 특성을 분석한 이론적 의미와 더불어 해당 상호연결망 구조를 갖는 다중컴퓨터시스템에서의 메시지 라우팅이나 자원 할당 및 스케줄링과 관련된 분야로의 응용가능성을 함께 의미하고 있다.

## Cycle Property in the (n,k)-star Graph

Jung-Hwan Chang†

ABSTRACT

In this paper, we analyze the cycle property of the (n,k)-star graph that has an attention as an alternative interconnection network topology in recent years. Based on the graph-theoretic properties in (n,k)-star graphs, we show the pancyclic property of the graphs and also present the corresponding algorithm.

Based on the recursive structure of the graph, we present such top-down approach that the resulting cycle can be constructed by applying series of “dimension expansion” operations to a kind of cycles consisting of sub-graphs. This processing naturally leads to such property that the resulting cycles tend to be integrated compactly within some minimal subset of sub-graphs, and also means its applicability to another classes of the disjoint-style cycle problems.

This result means not only the graph-theoretic contribution of analyzing the pancyclic property in the underlying graph model but also the parallel processing applications such as message routing or resource allocation and scheduling in the multi-computer system with the corresponding interconnection network.

### 1. 서 론

대규모 병렬처리시스템에서 다양한 응용분야의 소프트웨어들을 효율적으로 수행하기 위해서는 시스템을 구성하고 있는 노드들의 연결 구조를 그래프로 표현한

상호연결망(interconnection network) 위상의 역할이 중요하다. 일반적으로 상호연결망의 성능에 큰 영향을 미치는 그래프 이론적인 요소로는 지름(diameter), 연결도(connectivity), 고장 허용도(fault tolerance) 등이 중요하게 평가되고 있는데, 이러한 요소들의 특성을 개선하여 보다 좋은 성능의 상호연결망을 설계하려는 시도는 그래프 이론 및 병렬처리 분야에서 많은 관심

† 정 회 원 : 한국전기통신공사 통신망관리센터 선임연구원  
논문접수 : 2000년 2월 29일, 심사완료 : 2000년 4월 24일

을 받고 있다. 뿐만 아니라 알고리즘에 내재된 자료구조를 실제 구현된 시스템 구조에 효율적으로 매핑시키거나, 상호연결망 상호간 시뮬레이션을 위한 체계적인 접근으로서 두 개의 서로 다른 상호연결망 구조를 대표하는 그래프 상호간의 임베딩(embedding) 문제로 귀결되어 많은 관심을 받아왔다[1, 2].

지난 십 수년간 큰 관심을 받아 온 대표적인 상호연결망으로는 하이퍼큐브(hypercube 또는 (이진) n-큐브)를 꼽을 수 있으며[3], 하이퍼큐브를 능가하는 새로운 상호연결망으로써 스타 그래프(star graph 또는 n-스타)가 제안되었는데 성능에 영향을 주는 여러 가지 그래프 이론적인 특성에서 기존의 하이퍼큐브보다 우수한 것으로 알려져 있다[4, 5].

한편, 스타 그래프는 이러한 성능적인 요소에서의 우수함에도 불구하고 실질적인 응용분야에서 상호연결망으로 활용시 원하는 노드 개수를 지닌 적절한 차원을 결정하기가 어렵다는 단점이 지적되고 있다. 즉 n-차원 스타 그래프의 크기(size)는 n!이라는 값에 의해 결정되기 때문에 n의 값이 증가함에 따라 인접된 차원간의 차가 기하급수적으로 커지게 되므로 다양한 크기를 제공하지 못하여 현실적으로 구현하는데 있어서는 적당한 크기를 결정하기가 쉽지 않다는 것이다. 이러한 n-스타 그래프의 단점을 보완하기 위한 새로운 상호연결망으로서 (n,k)-스타 그래프가 등장하게 되었다[6].

n-스타 그래프에 대한 링 임베딩 및 사이클 특성을 분석한 연구결과들은 이미 잘 알려져 있으나[7, 8], n-스타 그래프를 포함하는 초-집합(super-set)에 해당하는 (n,k)-스타 그래프에 대한 연구결과로는 헤밀톤 사이클과 관련된 연구결과들만 일부 알려져 있을 뿐이다 [9, 10].

본 논문에서는 그래프의 범사이클(pancyclic) 특성을 다루게 되는데, 일반적으로 n개의 노드를 갖는 단순 (simple) 그래프에서 구성가능한 최소 크기(=3)의 사이클에서부터 최대 크기(=n)의 사이클인 헤밀톤 사이클까지 모든 종류에 해당하는 다양한 크기의 사이클들을 부그래프로 보유하고 있을 성질을 말한다.

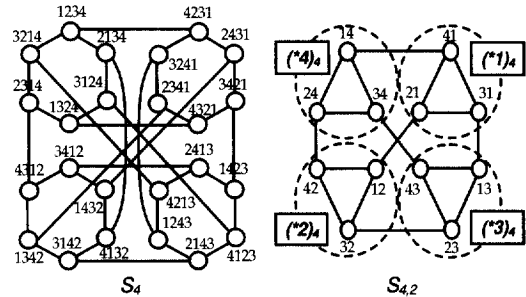
상호연결망 그래프에 부그래프로써 내재되어 있는 사이클들은 대부분 알고리즘들의 수행에 필수적인 기본 구조일 뿐만 아니라 노드간의 라우팅이나 프로세서 할당 및 스케줄링 관련 분야에서 특별히 중요한 역할을 하고 있어 다양한 사이클 관련 특성은 상호연결망으로서 갖추어야 할 중요한 요소 중 하나로 평가받고

있다[11].

〈표 1〉 대표적인 상호연결망의 그래프 특성 비교

위 상	노드 수	에지 수	분지 수	지 림	동질 성
n-큐브	$2^n$	$n2^{n-1}$	n	n	노드, 에지
n-스타	$n!$	$(n-1)n!/2$	n-1	$3(n-1)/2$	노드, 에지
(n,k)-스타	$n!/(n-k)!$	$(n-1)n!/2(n-k)!$	n-1	$2k-1$ , if $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ $\lfloor (n-1)/2 \rfloor + k$ , otherwise	노드

본 논문의 제2절에서는 본 논문에서 주로 다루게 될 (n,k)-스타 그래프에 대한 정의 및 특성을 살펴보고 제3절에서 사이클 특성과 관련된 주요 성질들을 분석하여 범사이클 특성이 존재함을 보이고 해당 사이클들을 찾는 알고리즘을 제시하며, 마지막 제4절에서 결론을 맺는 형태로 구성되어 있다.



(그림 1) 4-스타 및 (4,2)-스타 그래프

## 2. (n,k)-스타 그래프 특성

본 절에서는 (n,k)-스타 그래프에 내재된 다양한 사이클 특성 분석에 필요한 주요 성질들을 살펴보고자 한다. 본 논문에서 표현식 <n>은 자연수의 집합 {1, 2, ..., n}을 의미한다.

[정의 1]  $1 \leq k < n$ 을 만족하는 두 정수값 n과 k에 의해 다음과 같이 (n,k)-스타 그래프  $S_{n,k}$ 를 정의한다 [6]. 즉 노드의 집합  $V(S_{n,k})$ 는

$$V(S_{n,k}) = \{p_1 p_2 \dots p_k \mid p_i \in \langle n \rangle, 1 \leq i \leq k\}$$

와 같이 정의하고,  $V(S_{n,k})$ 에 속하는 임의의 노드  $p = p_1 p_2 \dots p_k$ 는 다음과 같은 규칙에 의해 해당

되는 노드들과 두 종류의 에지들을 통해 서로 연결된다.

- ①  $2 \leq i \leq k$ 를 만족하는 노드  $q = p_1 p_2 \dots p_i \dots p_k$ 와  $i$ -차원 에지들을 통해 연결하고,
- ② 노드들의 집합  $\{x p_2 \dots p_i \dots p_k \mid x \in \langle n \rangle \setminus \{p_j \mid 1 \leq j \leq k\}\}$ 에 해당하는 노드들과 각각  $1$ -차원으로 연결시킨다(여기서 부호 '\ '는 집합에서의 차집합을 의미한다).  $\square$

(그림 1)은 (4,2)-스타 그래프의 예를 대응되는 4-스타 그래프와 비교하여 보여주고 있다. 이어서 (n,k)-스타 그래프의 부그래프(sub-graph)를 나타내는 표현식에 대해 설명하고자 한다.

**[정의 2]** 표현식  $S = (s_1, s_2, \dots, s_k)_n$ 는  $n > k$ 를 만족하고 해당 범위 내의 각  $i$ 에 대해서  $s_i \in \langle n \rangle \cup \{*\}$ 를 만족하는 길이  $k$ 의 스트링 표현이라고 하자. 만일  $S$ 의 스트링 표현식 내에  $1 \leq l < k$ 를 만족하는  $l$ 개의 '\*'부호를 포함하고 있다면  $S$ 는  $S_{n,k}$ 로부터 분할된 결과로 얻어진  $(n-k+l, l)$ -부스타 그래프를 나타내고 있다. 여기서 특별한 부호인 '\*'는 해당되는 차원이 미확장 상태를 의미하며 집합  $\langle n \rangle \setminus \cup_{1 \leq i \leq k} \{s_i \mid s_i \neq *\}$  해당되는 임의의 부호가 올 수 있음을 의미한다.  $\square$

**[정의 3]**  $S_{n,k}$  내에서  $X = (x_1 \dots x_j \dots x_k)_n$ 를  $x_j = '*'$ 인  $(n-l, k-l)$ -부스타 그래프라고 하자.  $X$ 상에  **$j$ -차원 확장( $j$ -dimensional expansion)**을 적용한다는 의미는  $X$ 에서 '\*' 값을 갖는  $j$ -차원에 올 수 있는 모든 경우의 해당 값으로 대체시킴으로써 실질적으로는  $n-l$ 개의  $(n-l-1, k-l-1)$ -부스타 그래프들로 분할해 주는 효과를 얻는 연산을 의미한다. 본 정의는 순서를 갖는 차원들의 집합으로 그 범위를 확장할 수도 있다. 즉  $m < k-l$ 을 만족하는 임의의  $m$ 에 대해  $D = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ 라고 가정하면,  **$D$ -확장**은  $d_1$ -확장,  $d_2$ -확장, ...,  $d_m$ -확장 순으로  $m$ 번의 연속적인 확장을 차례로 적용함을 의미하게 되며, 적용 후에는  $(n-l)(n-l-1) \dots (n-l-m+1)$ 개의  $(n-l-m, k-l-m)$ -부스타 그래프들로 분할된다.  $\square$

예를 들어  $X = (21 * * 5)_8$ 는  $S_{8,5}$ 에 존재하는 (5,2)-부스타 그래프를 나타낸다. 여기서  $X$ 에 4-차원 확장을

적용하게 되면  $(21 * 35)_8, (21 * 45)_8, (21 * 65)_8, (21 * 75)_8$ , 그리고  $(21 * 85)_8$ 의 5개 (4,1)-부스타 그래프들로 분할할 수 있다.

차원에 대한 확장 적용과정에서 첫 번째 차원인 1-차원은 특별하게 취급을 하게 되는데, 그 이유는 1-차원 확장 적용결과 생성되는 부스타 그래프들에서는 다른 차원에서의 적용결과와는 달리 재귀적 성질을 활용할 수 없게 되기 때문이다.

**[정의 4]**  $S_{n,k}$ 에서 임의의 인접한 두  $(n-j, k-j)$ -부스타 그래프를 각각  $X$ 와  $Y$ 라고 하자. 만일  $X$ 와  $Y$ 의 스트링 표기법에서 '\*'를 제외한 부호들이 위치하고 있는 차원들 중에서 오직 하나의 차원에서만 대응되는 부호가 서로 다른 경우에  $X$ 와  $Y$ 는 서로 **인접 관계(adjacent relation)**에 있다고 한다. 인접 관계의 두  $(n-j, k-j)$ -부스타 그래프  $X, Y$ 에 대해서  **$X$ 로부터  $Y$ 로의 차-부호(difference in symbol)**란  $X$ 를 구성하는 부호 중에서  $Y$ 에는 존재하지 않는 부호를 의미하고,  $difS(X, Y)$ 로 표기한다. 유사한 방법에 의해  **$X$ 로부터  $Y$ 로의 차-차원(difference in dimension)**은  $difD(X, Y)$ 에 해당하는 부호가 위치하고 있는 차원을 의미하고  $difD(X, Y)$ 로 표기한다. 일반적으로  $difD(X, Y) = difD(Y, X)$ 가 성립하지만,  $difS(X, Y) \neq difS(Y, X)$ 이다.  $\square$

한편 (n,k)-스타 그래프에 대해서는 다음과 같은 그래프 이론적인 성질이 알려져 있다.

**[성질 1]**  $(n, n-1)$ -스타 그래프  $S_{n, n-1}$ 은  $n$ -스타 그래프  $S_n$ 과 동형(isomorphism)이다[6].  $\square$

**[성질 2]**  $(m, 1)$ -스타 그래프  $S_{m, 1}$ 은  $m$ 개의 노드를 갖는 완전그래프  $K_m$ 과 동형(isomorphism)이다[10].  $\square$

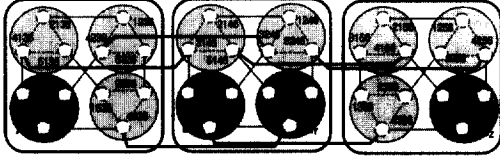
**[정의 5]**  $S_{n,k}$ 로부터 파생된 임의의 연속된  $(n-j, k-j)$ -부스타 그래프들의 집합  $X = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]$ 에서 각  $X_i$ 가 전후에 위치한 두 개의  $(n-j, k-j)$ -부스타 그래프들  $X_{(i-1) \bmod r}$ 과  $X_{(i+1) \bmod r}$  상호간에 인접(adjacent) 관계를 만족하는 경우에  $X$ 를 길이  $r$ 의  **$(n-j, k-j)$ -부스타-릿**이라고 칭하고,  $R_{n-j, k-j}^r$ 로 표기한다. 여기서 각  $X_i$ 를  **$(n-j, k-j)$ -부스타-노드**로,  $X_i$ 와 인접  $(n-j, k-j)$ -부스타-노드와의 연결에 참여하고 있는 에지들의 집합을  **$(n-j, k-j)$ -부스타-에지**로 일컫

는다.

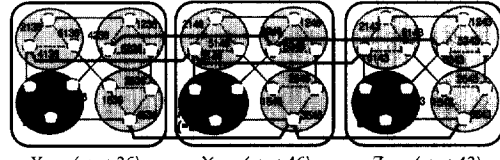


$$A_X = (x_1 x_2 \cdots x_{l-1} \underline{difS(Y, X)}_{x_l} \cdots x_k)_n$$

$$B_Y = (y_1 y_2 \cdots y_{l-1} \underline{difS(X, Y)}_{y_l} \cdots y_k)_n$$



$X = (* * 36)_6$      $Y = (* * 46)_6$      $Z = (* * 56)_6$   
(a)  $difS(X, Y) \neq difS(Z, Y)$  인 경우



$X = (* * 36)_6$      $Y = (* * 46)_6$      $Z = (* * 43)_6$   
(b)  $difS(X, Y) = difS(Z, Y)$  인 경우

(그림 2) 인접한 부스타-노드간 상호관계

( $n-j, k-j$ )-부스타-링 내의 인접한 두 ( $n-j, k-j$ )-부스타-노드를 각각  $X = (x_1 x_2 \cdots x_k)_n$ 와  $Y = (y_1 y_2 \cdots y_k)_n$ 라고 가정하고 임의의  $l$ -차원( $2 \leq l \leq k$ )에서의 해당되는 부호가  $x_l = y_l = *$ 라고 할 때,  $X$ 와  $Y$ 에 각각  $l$ -차원 확장을 적용함으로써 각각으로부터  $n-j$ 개의 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-노드들을 얻게 되는데 이들 상호간에 유지되는 성질의 특성을 살펴보고자 한다.

**[성질 3]**  $X$ 로부터 확장되어 생산된 각 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-노드들은 인접관계의 측면에서 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-에지에 의해 서로 완전연결(completely connected) 구조를 이루고 있으며,  $Y$ 에서도 성립한다. 뿐만 아니라  $X$  내의 특정한 한 개의 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-노드(특히  $A_X$ 라고 칭함, (그림 2) 참조)를 제외한  $n-j-1$ 개의 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-노드들은 각각  $Y$  내의 대응되는 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-노드와 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-에지에 의해 일대일 방식으로 서로 연결되어 있다(물론  $Y$  내에도  $X$ 의 대응되는 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-노드와 연결될 수 없는 특별한 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-노드가 하나 존재하며 이를  $B_Y$ 라고 칭하겠음. (그림 2) 참조).

여기서 상호간에 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-에지로 연결이 될 수 없는 특별한 두 개의 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-노드  $A_X$ 와  $B_Y$ 에 해당하는 스트링 표현식에서 확장된 차원인 차원  $l$ 의 부호로 아래와 같은 특별한 값을 갖는 경우에 해당하게 된다.

[성질 3]으로부터 유추해 보면 인접된 3개의 ( $n-j, k-j$ )-부스타-노드  $X, Y$ , 및  $Z$  중에서  $Y$  내의 분할된 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-노드들의 인접관계를 살펴보면,  $difS(X, Y) = difS(Z, Y)$ 인 경우에는 하나의 동일한 ( $n-j-1, k-j-1$ )-부스타-노드가  $X$  및  $Z$ 와 동시에 연결될 수 없게 됨을 알 수 있다((그림 2)(b) 참조).

**[성질 4]** 두 ( $n-j, k-j$ )-부스타-노드  $X$ 와  $Y$ 사이의 인접관계를 표시하고 있는 ( $n-j, k-j$ )-부스타-에지는 그 그래프  $S_{n,k}$ 의 에지들 중에서 차원이  $difD(X, Y)$ 인 에지들의 집합을 의미하며, 그 연결된 에지의 수는  $(n-j-1)(n-j-2) \cdots (n-k+1)$ 개이다. □

지금까지 살펴본 성질들은 (그림 2)에서 쉽게 확인할 수 있다.

본 논문에서 언급된 임의의 부스타-링  $R = [X_0, X_i, \dots, X_{r-1}]$ 에서 각  $X_j$ 의 인덱스를 나타내는  $j$ 의 표기 상에서 " $j+1$ " 또는 " $j-1$ "은 특별한 언급이 없는 한 각각 " $(j+1) \bmod r$ " 또는 " $(j-1) \bmod r$ "을 의미한다.

### 3. (n,k)-스타 그래프의 사이클 특성

본 절에서는 ( $n, k$ )-스타 그래프에 관한 그래프 이론적 분석을 통해 사이클 특성을 밝히고 해당 사이클들을 찾을 수 있는 알고리즘을 제시하고자 한다.

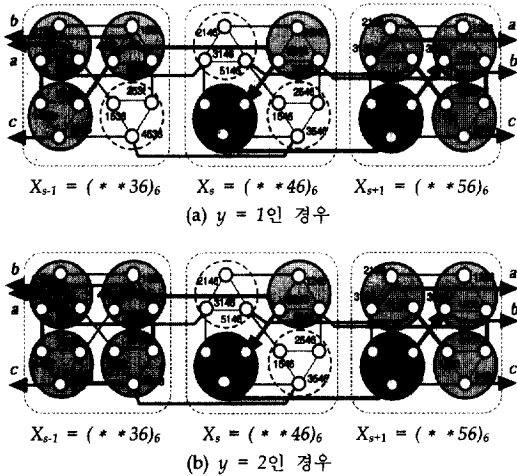
#### 3.1 그래프 특성

앞에서 언급한 바와 같이 ( $n, k$ )-스타 그래프는  $n$ -스타 그래프를 포함하는 초집합(super-set)에 해당하는 포괄적인 그래프 부류에 속하지만 상호간에는 앞에서 언급한 [성질 1]과 같이 부분적인 종속관계를 갖는 것으로 알려져 있는데, 이러한 성질은  $n$ -스타 그래프와 마찬가지로 그래프가 재귀적(recursive) 특성을 보유하고 있음을 의미하게 된다. 따라서 이러한 성질들을 효율적으로 활용함으로써 그래프의 범사이클 특성을 밝히는데 필요한 성질들을 정리해 보고자 한다.

**[보조정리 1]**  $S_{n,k}$  내에서  $i \leq k-3$ 을 만족하는 임의의 ( $n-i, k-i$ )-부스타-링  $R = [X_0, X_i, \dots, X_{r-1}]$ 이 아래에 주어진 조건들을 만족하면, 주어진  $R$ 로부터 길

이  $(n-i)(r-1)+y$ 인  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-링  $R'$ 을 항상 만들 수 있다(여기서  $1 \leq y \leq n-i$ ).

- ① 각  $X_j$ 의 미확장 차원들은 모두 위치가 같고,  $1$ -차원을 반드시 포함하며,
- ②  $r \geq 2$ 인 경우,  $\text{difs}(X_{s-1}, X_s) \neq \text{difs}(X_{s+1}, X_s)$ 를 만족하는 인덱스  $s$ 가 적어도 하나 이상 존재한다.



(그림 3) [보조정리 1] 증명의 설명

[증명]  $n-k=1$ 인 경우는 [성질 1]에 의해  $n$ -스타 그래프와 동형으로써 스타 그래프에 관한 연구결과[7, 8]에 의해 이미 증명된 사실이므로, 여기서는  $n-k \geq 2$ 인 경우에 대해서만 고려한다.  $R$ 로부터 실제  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-링을 만드는 과정의 설명을 통해 보조정리가 성립함을 보이고자 한다.

먼저, 미확장 차원들 중에서 첫 번째 차원이 아닌 임의의 한 차원을 선택하여 그 차원을  $d$ 라고 하자 ( $R$  내의 각  $X_j$  들은  $(n-i, k-i)$ -부스타 그래프이므로 각각  $k-i$ 개의 미확장 차원이 존재하는데,  $i \leq k-3$ 이므로 적어도 3개 이상의 미확장 차원이 존재함).

$R$  내의 각  $X_j$ 들에 대해  $d$ -차원 확장을 적용하면 각  $X_j$ 로부터  $n-i$ 개의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드들을 얻게 되어 전체적으로  $R$  내에  $r(n-i)$ 개의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드들을 얻게 된다. 따라서 새로 생성된  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드들을 체계적인 방법에 의해 서로 연결시켜 길이  $(n-i)(r-1)+y$ 인  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-링을 만드는 기법을 보이고자 한다.

주어진 조건으로부터  $R$  내에  $\text{difs}(X_{s-1}, X_s) \neq \text{difs}(X_{s+1}, X_s)$ 를 만족하는  $(n-i, k-i)$ -부스타-노드가 하나 이상 존재함을 알 수 있고, 따라서 조건을 만족하는 임의의 한  $(n-i, k-i)$ -부스타-노드  $X_s$ 와  $X_{s+1}$ 를 각각 최종 및 출발 부스타-노드로 설정하도록 한다.  $X_{s+1}$ 과  $X_s$  내에서  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-링 구성의 시작 및 최종  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드가 될  $S$ 와  $T$ 를 선정하는 방법은 최종 연결 단계에서의 링 구성을 보장하기 위해 (그림 3)에서 설명하고 있는 것과 같이 특별한  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드들로 지정해 준다. 즉, 조건  $\text{difs}(X_{s-1}, X_s) \neq \text{difs}(X_{s+1}, X_s)$ 에 의해  $X_s$  내에는  $X_{s-1}$ 의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드와는 연결되지 않고  $X_{s+1}$ 의 해당  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드와만 연결을 갖는 그러한  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드가 반드시 하나 이상 존재하게 되는데 이러한 성질을 만족하는  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드를  $T$ 로, 그리고  $T$ 와 연결된  $X_{s+1}$  내의 해당  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드를  $S$ 로 선정한다. 이러한 선정의 의미는  $X_{s-1}$  내의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드 방문 후  $X_s$ 로 진입시 관문이 되는 해당  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드는  $T$ 가 될 수 없도록 함으로써  $X_s$  내에서의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-링 구성을 보장 받을 수 있게 해 준다.

따라서  $X_{s+1}$  (엄밀히 말하면  $X_{s+1}$  내의  $S$ )를 시작으로 하여  $R$ 의 링을 따라 각  $(n-i, k-i)$ -부스타-노드들을 차례로 방문하면서 그 내부에 존재하는  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드들을 일정한 규칙을 적용하면서 연결시켜 패스를 구성하고 최종적으로  $X_s$ 를 방문하여  $X_s$  내의  $T$ 를 최종적으로 방문함으로써  $T$ 와  $S$ 를 연결시키게 되어 궁극적으로  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-링을 만들게 된다.

한편, [성질 3]으로부터 각  $X_j$ 는 내부에 생성된  $n-i$ 개의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드들 상호간에 완전 연결 구조를 갖고 있으며, 인접된 두 개의  $(n-i, k-i)$ -부스타-노드들인  $X_{i-1}$  및  $X_{i+1}$  내부에 존재하는 각각의  $n-i$ 개의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드들과도 특정한 하나씩을 제외하고는 모두 인접관계적 측면에서 연결되어 있다는 사실을 이용하면  $R$ 의 각 부스타-노드들을 순차적으로 다음과 같은 규칙을 적용하면서 방문하여  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드들의 패스를 쉽게 연장해 나갈 수 있게 된다.

- ①  $X_j$  내부로 일단 들어오면  $X_j$ 를 떠나 다음 차례의  $X_{j+1}$ 로 진행하기 전에  $X_j$  내에 존재하는 모든  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드들을 우선적으로 방문한다.
- ②  $X_j$  내에 존재하는  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드들 중에서 다음 차례에 방문하게 될  $X_{j+1}$ 과 연결되어 있지 않은 특정  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드를 마지막으로 방문하지 않는다.

위와 같은 방법으로 주어진 각  $(n-i, k-i)$ -부스타-노드들을 방문후  $X_{s_i}$ 에 도달하면 마지막으로 원하는 길이 만큼의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-링으로 만들어 주기 위한 추가적인 배려가 필요하게 된다.

우선  $y = 1$ 인 경우에는 (그림 3)의 (a)에서 보는 바와 같이 위의 규칙 ① 대신  $X_{s_i}$  내에 존재하는  $n$ 개의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드중 하나를 제외한  $n-i-1$ 개만 방문한 후 다음 차례의  $X_s$ 로 건너가서  $X_s$  내에서는 이미 지정된  $T$ 를 포함하여 2개의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드만 방문하도록 함으로써 전체  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-링의 크기가  $(n-i)(r-1)+1$ 이 되도록 해 준다.

한편  $y \geq 2$ 인 경우에는 (그림 3)의 (b)에서 보는 바와 같이  $X_{s_i}$ 까지 규칙 ①을 적용한 후  $X_s$ 로 건너가서  $X_s$  내에서는 이미 지정된  $T$ 를 포함하여  $y$ 개의  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드만 방문하도록 함으로써 전체  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-링의 크기가  $(n-i)(r-1)+y$ 가 되도록 해 준다.

두 경우 모두 기 지정된 최종  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드  $T$ 를 마지막으로 방문하도록 함으로써 이미 지정되어 있는 출발  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-노드  $S$ 와의 연결이 보장되어 궁극적으로 길이  $(n-i)(r-1)+y$ 인  $(n-i-1, k-i-1)$ -부스타-링을 만들 수 있게 된다. □

[보조정리 1]은 주어진  $S_{n,k}$ 로부터  $S_{n-1, k-1}$ 를 만든 다음  $S_{n-1, k-1}, S_{n-2, k-2}, \dots, S_{n-k+3, 3}$ 까지 분할시키는 일련의 과정들을 그래프 자체의 재귀적 성질을 이용하여 연속적으로 만들 수 있음을 의미하고 있다.

그러나 더 이상의 그래프 분할을 수행하기 위해서는 추가적인 전제조건이 요구됨을 암시하고 있다. 이어지는 보조정리들을 통해 이러한 조건들을 분석하고자 한다.

[보조정리 2]  $S_{n,k}$  내에서 길이  $r$ 인 임의의  $(n-k+1,$

$1)$ -부스타-링  $R=[X_0, X_1, \dots, X_r]$ 이 다음과 같은 조건을 만족하면  $R$ 로부터 길이  $(n-k+1)(r-1)+y$ 인 사이클을 항상 만들 수 있다(여기서  $1 \leq y \leq n-k+1$ ).

- (a) 각  $X_j$ 에서 미확장 차원은 모두 1-차원이며,
- (b)  $r \geq 2$ 인 경우, 각 인덱스  $i$ 에 대해서  $difS(X_{i-1}, X_i) \neq difS(X_{i+1}, X_i)$ 가 성립한다.

[증명] 여기서도 [보조정리 1]에서 언급한 바와 같은 이유로  $n-k \geq 2$ 인 경우만 고려한다.

주어진  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링  $R$ 에서 조건 (b)가 성립한다는 의미는 앞에서 언급된 [성질 3]에 의해 부스타-링을 구성하고 있는 각  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드  $X_i$  내에 존재하는 노드들 중에서  $X_{i-1}$  내의 해당 노드와 연결될 수 없는 노드((그림 2)에서 노드  $A_i$ )는  $X_{i-1}$  내의 해당 노드와 연결될 수 없는 노드((그림 2)에서 노드  $B_i$ )와는 항상 서로 다르다는 의미이며, 이는  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 상호간 패스 구성시에 노드 선택의 폭을 넓혀주는 바람직한 성질이다. 한편, [보조정리 1]에 의해 각  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드는 완전 그래프  $K_{n-k+1}$ 와 동형이므로 내부의 각 노드 상호간에는 충분히 많은 예지로 연결되어 있어 내부에서 패스를 구성하는데 전혀 문제가 없다.

따라서 [보조정리 1]에서 제시한 두 규칙을 적용하여 각 부스타-노드들을 방문하면서 패스로 연결시켜 나가면 쉽게 각  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 내의 노드들을 빠짐없이 연결시키는 패스를 구성하는데 전혀 문제가 없으며, 마지막으로 방문하게 되는 두  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드에서 길이  $y$ 만큼을 보정시켜 주는 부분 역시  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 내에서 완전연결되어 있는 일부 노드들을 필요한 수만큼 제외시키는 문제이므로 (그림 6)에서 보는 바와 같이 쉽게 주어진 길이의 사이클을 찾을 수 있게 된다. □

[보조정리 2]는 주어진  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링으로부터 해밀톤 사이클의 구성을 보장받기 위한  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링의 전제조건을 제시하고 있다. 따라서 조건을 만족하는  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 만드는 방법에 대해 설명하고자 한다.

주어진  $(n-k+2, 2)$ -부스타-링  $R=[X_0, X_1, \dots, X_r]$ 에서 '\*'인 차원  $d$ 에 대해  $d$ -확장을 적용한 후 각  $X_i$ 로부터 얻어진  $n-k+2$ 개의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드들을

방문 순서대로 각각  $X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n-k+2}$  이라고 할 때, 각  $X_{i,j}$  상호간에 다음과 같은 성질을 관찰할 수 있다.

- ㉑  $X_i$  내의 임의의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드  $X_{i,y}$ 는 인접한 두  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드  $X_{i-1}$  및  $X_{i+1}$  내의 임의의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드  $X_{i-1,x}$  및  $X_{i+1,z}$  상호간에 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} difS(X_{i-1,x}, X_{i,y}) &= difS(X_{i-1}, X_i), 1 \leq x, y \leq n-k+2 \\ difS(X_{i+1,z}, X_{i,y}) &= difS(X_{i+1}, X_i), 1 \leq y, z \leq n-k+2 \end{aligned}$$

- ㉒  $X_i$  내의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 중에서  $X_{i-1}$ 의 해당  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 연결되지 않은  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드를  $X_{i,u}$ 라 하면, 다음 식이 성립한다.

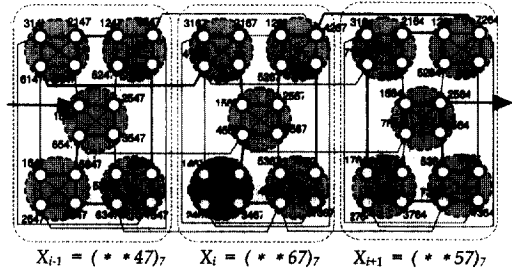
$$difS(X_{i,u}, X_{i,y}) = difS(X_{i-1}, X_i), 1 \leq y \leq n-k+2 \ \& \ y \neq u$$

- ㉓  $X_i$  내의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 중에서  $X_{i+1}$ 의 해당  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 연결되지 않은  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드를  $X_{i,v}$ 라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$difS(X_{i,v}, X_{i,y}) = difS(X_{i+1}, X_i), 1 \leq y \leq n-k+2 \ \& \ y \neq v$$

이러한 성질들을 역으로 해석해 보면, 생성될 부스타-링이 갖추어야 할 중요한 성질의 하나인  $difS(X_{i-1, n-k+2}, X_{i,1}) = difS(X_{i,2}, X_{i,1})$  및  $difS(X_{i, n-k+1}, X_{i, n-k+2}) = difS(X_{i+1,1}, X_{i, n-k+2})$ 가 만족되도록 유도하기 위해서는 다음과 같은 특별한 방문 규칙에 따라 각 부스타-노드들을 방문해야 한다는 사실을 알 수 있게 된다. 즉 위의 성질 ㉑과 ㉒ 및 ㉑과 ㉓으로부터 각각 다음과 같은 부스타-노드 방문 규칙을 얻을 수 있다.

- ㉔  $X_i$  내의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 중에서  $X_{i-1}$ 의 해당  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 연결되지 않은  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드는 반드시  $X_i$  내에서 첫 번째 또는 두 번째로 방문되지 않도록 하여야 한다.
- ㉕  $X_i$  내의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 중에서  $X_{i+1}$ 의 해당  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 연결되지 않은  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드는 반드시  $X_i$  내에서 마지막 또는 그 바로 앞 순서에 해당되는  $n-k+2$  또는  $n-k+1$ 번째 순서에 방문되지 않도록 하여야 한다.



(그림 4)  $n-k \geq 3$ 인 경우의 부스타-노드 상호간 인접관계

다음의 연속된 두 보조정리들을 통해 주어진  $(n-k+2, 2)$ -부스타-링으로부터 [보조정리 2]에서 요구하는  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 만들 수 있음을 보이고자 한다. 그러나 주어진 그래프의 두 파라메타 차이값을 나타내는  $n-k$  값에 따라 분할되는 부스타-노드들의 개수가 정해지게 됨에 따라 이 값이 작을수록 보다 엄격한 방문규칙을 적용시켜야 하는데, 이 값이 2 이하가 되는 경우에는 특별한 고려가 필요하게 됨을 이어지는 보조정리들을 통해 살펴보고자 한다.

**[보조정리 3]**  $n-k \geq 3$ 을 만족하는  $S_{n,k}$  내의 임의의 길이  $r$ 인  $(n-k+2, 2)$ -부스타-링을  $R = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]$ 이라고 하면, 주어진  $R$ 로부터 다음과 같은 조건을 만족하는 길이  $(n-k+2)(r-1)+y$ 인  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링  $R' = [Y_0, Y_1, \dots, Y_{(r-1)(n-k+2)+y-1}]$ 을 항상 만들 수 있다(여기서  $1 \leq y \leq n-k+2$ ).

- (a)  $r \geq 2$ 인 경우, 각  $j$ 에 대해서  $difS(Y_{j-1}, Y_j) = difS(Y_{j+1}, Y_j)$ 가 성립한다.

**[중명]** 주어진  $n-k \geq 3$ 이라는 조건으로부터  $R$ 의 각  $X_i$  내에 적어도 5개 이상의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드들이 존재한다는 사실을 알 수 있다. 한편 주어진  $(n-k+2, 2)$ -부스타-링  $R$  내의 각  $X_i$ 에 정상적인  $d$ -확장을 적용시켜 얻어진  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드  $Y_j$ 들에 대해 조건식  $difS(Y_{j-1}, Y_j) = difS(Y_{j+1}, Y_j)$ 가 성립하도록 하기 위해서는 앞에서 언급된 방문 규칙 ㉔ 및 ㉕와 더불어 다음의 규칙이 만족되도록 방문하여야 한다.

- ㉖  $X_i$  내의 각  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드  $Y_j$  들을 모두 방문한 후에  $X_i$ 를 떠나 다음  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드로 진행한다.

따라서, [보조정리 2]에서와 유사한 방법으로  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 구성하는 과정에서 새로운 방문 규칙 ㉓, ㉔, 및 ㉕를 적용하면 쉽게 원하는  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 구성할 수 있게 된다.

만일 최악의 경우로써  $X_i$  내의 특정  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드  $Y_k$  ((그림 4)에서 부스타-노드  $C$  참조)가  $X_{i-1}$  및  $X_{i+1}$ 의 해당  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 동시에 연결되지 않는 경우를 고려해 보면, 이 경우에 규칙 ㉓와 ㉔를 동시에 만족시키기 위해서는  $Y_k$ 를 반드시  $X_i$  내에서 세 번째로 방문하도록 해주면 되므로, 전체적인  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링 구성에는 전혀 문제가 없다.

그리고 마지막 연결과정의  $y$ 를 보정해 주기 위한 과정에서  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드 내의 모든  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드들을 패스로 연결시키지 않기 위해서 제외되는  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드의 대상으로는 우선적으로 (그림 4)의  $C$ 와 같이 전후의  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드와 동시에 연결되지 않은 그런  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드를 정해주면 된다. □

**[보조정리 4]**  $n-k \leq 2$ 를 만족하는  $S_{n,k}$  내의 임의의 길이  $r$ 인  $(n-k+2, 2)$ -부스타-링을  $R = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]$ 이라고 하고  $R$  내의 각  $(n-k+2, 2)$ -부스타 그래프 상호간에 조건  $difS(X_{i-1}, X_i) \neq difS(X_{i+1}, X_i)$ 이 만족되면, 주어진  $R$ 로부터 다음과 같은 조건을 만족하는 길이  $(n-k+2)(r-1)+y$ 인  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링  $R' = [Y_0, Y_1, \dots, Y_{(n-k+2)(r-1)+y-1}]$ 을 항상 만들 수 있다(여기서  $1 \leq y \leq n-k+2$ ).

(a)  $r \geq 2$ 인 경우, 각  $j$ 에 대해서  $difS(X_{j-1}, X_j) \neq difS(X_{j+1}, X_j)$ 가 성립한다.

**[증명]** [보조정리 3]과 유사하나, " $n-k \leq 2$ "라는 조건으로 인해 추가적인 고려가 필요하다.  $n-k=1$ 인 경우는 단순히  $n$ -스타 그래프이므로 여기서는 고려하지 않고,  $n-k=2$ 인 경우만 고려한다. 이 경우에 각  $X_i$  내에 4개의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드만이 존재하는 최악의 상황을 예상할 수 있고 이 경우에는 앞에서 언급된 부스타-노드 방문 규칙 ㉓와 ㉔를 모두 만족시킬 수 없는 경우가 발생하게 된다.

그러나, 주어진 조건에서  $R$  내의 인접된  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드 상호간에 조건  $difS(X_{i-1}, X_i) \neq difS(X_{i+1}, X_i)$ 이 만족되므로 이 의미는  $X_i$  내의 특정  $(n-k+1,$

$1)$ -부스타-노드  $Y_k$ 가 [보조정리 3]에서 고려했던 최악의 상황과 같이  $X_{i-1}$  및  $X_{i+1}$ 의 해당  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드와 동시에 연결되지 않는 경우는 발생하지 않는다는 뜻이 되므로 이러한 조건하에서는 부스타-노드 방문 규칙 ㉓와 ㉔를 모두 만족시키는데 아무런 문제가 없다. 따라서 앞의 [보조정리 3]과 같은 방법을 적용하여 원하는 길이의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 만들 수 있게 된다.

마지막의  $y$  부분을 보정해 주기 위한 과정 역시 앞의 [보조정리 3]에서와 유사하게 필요한 수만큼의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드를 방문에서 제외시킴으로써 길이를 조정해 주면 된다. □

**[보조정리 5]**  $n-k \leq 2$ 를 만족하는  $S_{n,k}$  내의 임의의 길이  $r$ 인  $(n-k+3, 3)$ -부스타-링을  $R = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]$ 이라고 하면 주어진  $R$ 로부터 다음과 같은 조건을 만족하는 길이  $(n-k+3)(r-1)+y$ 인  $(n-k+2, 2)$ -부스타-링  $R' = [Y_0, Y_1, \dots, Y_{(n-k+3)(r-1)+y-1}]$ 을 항상 만들 수 있다(여기서  $1 \leq y \leq n-k+3$ ).

(a)  $r \geq 2$ 인 경우, 각  $j$ 에 대해서  $difS(X_{j-1} \bmod r(n-k+3), X_j) \neq difS(X_{j+1} \bmod r(n-k+3), X_j)$ 가 성립한다.

**[증명]**  $n-k=1$ 인 경우는 단순히  $n$ -스타 그래프이므로 여기서는  $n-k=2$ 인 경우만 고려한다. 이 경우에 각  $X_i$  내에 존재할 수 있는  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드는 5개가 되므로 앞에서 언급된 부스타-노드 방문 규칙 ㉓와 ㉔를 모두 만족시키는데 아무런 문제가 없다. 따라서 [보조정리 4]에서와 같은 방법으로 각 부스타-노드들을 방문하되 각  $(n-k+3, 3)$ -부스타-노드에 대해 아래와 같은 방문규칙 ㉓', ㉔', 및 ㉕'을 적용시키면 원하는 새로운  $(n-k+2, 2)$ -부스타-링을 쉽게 구성할 수 있다.

㉓'  $X_i$  내의  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드 중에서  $X_{i-1}$ 의 해당  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드와 연결되지 않은  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드  $X_{i,u}$ 는 반드시  $X_i$  내에서 첫 번째 또는 두 번째로 방문하지 않도록 하여야 한다.

㉔'  $X_i$  내의  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드 중에서  $X_{i+1}$ 의 해당  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드와 연결되지 않은  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드  $X_{i,v}$ 는 반드시  $X_i$  내에서 마지막 또는 그 바로 앞 순서에 해당되는



$n-k+3$  또는  $n-k+2$  번째 차례로 방문되지 않도록 하여야 한다.

㉑  $X_i$  내의 각  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드  $Y_j$  들을 모두 방문한 후에  $X_i$ 를 떠나 다음  $(n-k+3, 3)$ -부스타-노드인  $X_{i+1}$ 로 진행한다.

아울러, 최종적으로  $y$ 만큼의 길이를 보정해 주기 위한 과정 역시 앞의 [보조정리 1]에서와 유사하게 필요한 수만큼의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드를 방문에서 제외시킴으로써 길이를 조정해 주면 되므로 전혀 문제가 없다. □

3.2 임베딩 알고리즘

앞 절에서 언급한 여러 보조정리들의 증명과정에서 설명된 기법들을 체계적으로 정리하면 (그림 5)와 같은 알고리즘으로 요약할 수 있게 된다. 아울러 제시된 알고리즘의 수행 예제는 (그림 6)에서 보여주고 있다.

**알고리즘 Cycles-in-NK-Star(n,k,L):**  
 /\* 주어진 길이 L인 사이클 구성 알고리즘 ( $3 \leq L \leq n!/(n-k)!$ ) \*/

**Step 1.**  $S_n$ 에 k-확장을 적용한 후 생성된 n개의  $(n-1, k-1)$ -부스타-노드들 중에서 임의의  $\lfloor L(n-k)/(n-1) \rfloor$ 개를 연결시켜 길이  $\lfloor L(n-k)/(n-1) \rfloor$ 의  $(n-1, k-1)$ -부스타-링으로 만든다.

**Step 2.** for  $j := k-1$  downto 4 do  
 step 2.1: 주어진 길이  $\lfloor L(n-k)/(n-k+j) \rfloor$ 의  $(n-k+j, j)$ -부스타-링에 j-확장을 적용한다.  
 step 2.2: 적용 후 생성된  $(n-k+j) \lfloor L(n-k)/(n-k+j) \rfloor$ 개의  $(n-k+j-1, j-1)$ -부스타-노드들 중  $\lfloor L(n-k)/(n-k+j-1) \rfloor$ 개를 연결시켜 길이  $\lfloor L(n-k)/(n-k+j-1) \rfloor$ 인  $(n-k+j-1, j-1)$ -부스타-링을 만든다 ((보조정리 1) 참조).

**Step 3.** 주어진 길이  $\lfloor L(n-k)/(n-k+3) \rfloor$ 의  $(n-k+3, 3)$ -부스타-링에 3-확장을 적용시켜 생성된  $(n-k+3) \lfloor L(n-k)/(n-k+3) \rfloor$ 개의  $(n-k+2, 2)$ -부스타-노드들 중  $\lfloor L(n-k)/(n-k+2) \rfloor$ 개를 연결시켜 길이  $\lfloor L(n-k)/(n-k+2) \rfloor$ 인  $(n-k+2, 2)$ -부스타-링을 만든다( $n-k \leq 2$ 인 경우는 (보조정리 5)를, 그리고  $n-k \geq 3$ 인 경우는 (보조정리 1)을 참조).

**Step 4.** 주어진 길이  $\lfloor L(n-k)/(n-k+2) \rfloor$ 의  $(n-k+2, 2)$ -부스타-링에 2-확장을 적용시켜 생성된  $(n-k+2) \lfloor L(n-k)/(n-k+2) \rfloor$ 개의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드들 중  $\lfloor L(n-k)/(n-k+1) \rfloor$ 개를 연결시켜 길이  $\lfloor L(n-k)/(n-k+1) \rfloor$ 인  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링을 만든다( $n-k \leq 2$ 인 경우는 (보조정리 4)를, 그리고  $n-k \geq 3$ 인 경우는 (보조정리 3)을 참조).

**Step 5.** 주어진 길이  $\lfloor L(n-k)/(n-k+1) \rfloor$ 의  $(n-k+1, 1)$ -부스타-링의 각  $(n-k+1, 1)$ -부스타-노드 내부에 존재하는  $(n-k+1) \lfloor L(n-k)/(n-k+1) \rfloor$ 개의 노드들 중 L개를 연결시켜 길이 L인 사이클을 구성한다 ((보조정리 2) 참조).

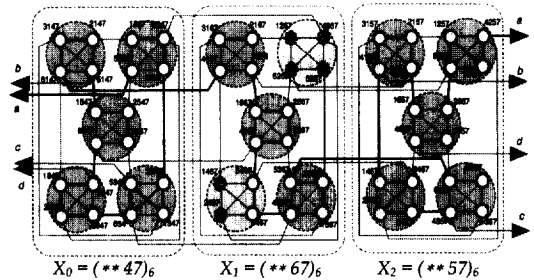
(그림 5) 사이클 구성 알고리즘

주어진 알고리즘의 정확성(correctness)에 대한 증명은 앞에서 언급했던 보조정리들의 증명과정을 통해 이미 밝혀진 사실이므로 여기서는 생략한다. 결과적으로 지금까지 언급한 내용들로부터 다음과 같은 사실이 성립함을 알 수 있다.

[정리 1]  $(n, k)$ -스타 그래프  $S_{n,k}$ 는 3 이상  $n!/(n-k)!$

이하에 해당되는 모든 길이의 사이클들을 부그래프로 보유하고 있다. □

위의 [정리 1]은  $(n, k)$ -스타 그래프의 범사이클(pan-cyclic) 특성을 의미하게 되는데, 병렬처리분야에서 다양한 응용 소프트웨어의 효율적인 수행을 위한 자원 관리에 필수적인 프로세서의 할당 및 스케줄링 등의 분야에서 활용이 가능할 것으로 기대된다.



(그림 6) 길이 54인 링의 구성 예(총 노드수 60개)

4. 결 론

본 논문에서는 병렬처리 분야의 응용과 관련하여 최근 많은 관심을 받고 있는 상호연결망 그래프 중의 하나인  $(n, k)$ -스타 그래프에서 범사이클 특성을 밝히는 문제를 다루었다.  $(n, k)$ -스타 그래프의 재귀적 성질을 이용하여 그래프를 체계적으로 분할해 가는 일련의 과정을 통해 3이상부터  $n!/(n-k)!$ 에 해당하는 헤밀톤 사이클까지 모든 종류의 사이클들을 부그래프로 보유하고 있음을 보였고 해당 사이클들을 찾는 알고리즘을 제시하였다.

이러한 연구결과는  $(n, k)$ -스타 그래프에 대한 범사이클 특성을 분석한 최초의 연구로서 의의를 갖게 되며, 병렬처리 분야에서 사이클을 기반으로 하는 멀티캐스팅 등의 응용에 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

그리고 본 논문에서 제안된 기법은 그래프 고유의 재귀적 성질을 활용한 하향식(top-down) 구성방법을 채택함으로써 결과적으로 생성되는 사이클이 최소한의 부-그래프들로 집적되는 경향을 띠게 되며, 따라서 서로 노드 또는 에지상에 서로 중복이 없이 독립된(disjoint) 사이클들을 찾는 문제 등의 분야로도 응용이 가능할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

[1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," *J. of Parallel and Distrib. Comput.*, Vol.4, pp.439-458, 1987.

[2] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," *Computing Supplement*, Vol.7, pp.257-282, 1990.

[3] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," *IEEE Trans. on Comput.*, Vol.37, pp.867-872, 1988.

[4] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The star graph : An attractive alternative to the  $n$ -cube," *Proc. of the Int'l Conf. on Parallel Processing*, pp. 393-400, 1987.

[5] K. Day and A. Tripathi, "A comparative study of topological properties of hypercubes and star graphs," *IEEE Trans. on Paral. and Distrib. Sys.*, Vol.5, No.1, pp.31-38, 1994.

[6] W. K. Chiang and R. J. Chen, "The  $(n,k)$ -star graph : A generalized star graph," *Inf. Process. Lett.*, Vol.56, pp.259-264, 1995.

[7] J. S. Jwo, S. Lakshminarayanan, and S. K. Dhall, "Embedding of cycles and grids in star graphs," *Proc. of the Symp. on Parallel and Distrib. Processing*, pp.540-547, 1990.

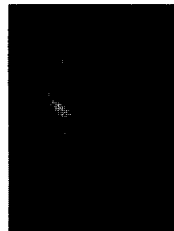
[8] M. Nigam, S. Sahni, and B. Krishnamurthy, "Em-

bedding hamiltonians and hypercubes in star interconnection graphs," *Proc. of the Int'l Conf. on Parallel Processing*, pp.340-343, 1990.

[9] 박천용, 장직현, " $(n,k)$ -스타 그래프상의 헤밀토니안 임베딩", 한국정보과학회 논문지(A), Vol.25, No.12, pp.1384-1391, 1998.

[10] 장정환, 좌경룡, " $(n,k)$ -스타 그래프에서의 새로운 링 임베딩 및 고장허용 임베딩으로의 응용", 한국정보과학회 논문지 : 시스템 및 이론, Vol.27, pp.313-323, 2000.

[11] Y. C. Tseng, D. K. Panda, and T. H. Lai, "A trip-based multicasting model in wormhole-routed networks with virtual channels," *IEEE Trans. on Paral. and Distrib. Sys.*, Vol.7, No.2, pp.138-150, 1996.



장 정 환

e-mail : jjh0726@kt.co.kr

1983년 경북대학교 전자공학과 졸업(학사)

1985년 한국과학기술원 전산학과 졸업(석사)

1998년 한국과학기술원 전산학과 졸업(박사)

1985년~현재 한국전기통신공사 통신망관리센터 선임 연구원

관심분야 : 병렬처리, 멀티미디어 통신시스템 및 그래프 이론 응용 등