

Hübner 방법에 기초한 수치등각사상의 자동화 알고리즘

송 은 지[†]

요 약

표준영역인 단위원 내부로부터 문제영역인 Jordan영역 내부로의 등각사상을 구하는 문제는 비선형 방정식인 Theodorsen 방정식을 푸는 것으로 귀결된다. 이 방정식을 푸는 여러 해법 중 효율적인 방법으로 알려진 Hübner 방법에 대하여 본 연구자는 저주파필터를 개발 적용하여 수렴속도를 대폭 개선한 바 있다[1]. 본 논문에서는 저주파필터를 적용한 Hübner 방법에서 지금까지 경험에 의존했던 표본수와 저주파필터의 파라메타가 주어진 문제영역에 따라 자동적으로 결정되는 알고리즘을 제안한다. 이것은 문제의 난이도가 문제영역의 변형에 의존한다는 전제로 문제영역의 모양을 결정하는 함수를 Fourier 급수로 분석하여 얻을 수 있다.

Automatic algorithm for Numerical conformal mapping based on the Hübner's Method

Eun-Jee Song[†]

ABSTRACT

The problem of determining the conformal maps from the unit disk onto a Jordan region has been completed by solving the Theodorsen equation that is nonlinear.

For the Hübner's method, which has been well known for the efficient method among the many suggestions for the Theodorsen equation, it has been proved in our early study that the convergence rate could be remarkably improved by exploring and applying a low-frequency pass filter[1]. However, in the Hübner's method with the low-frequency filter, the discrete numbers and parameters of the low-frequency filter were able to be acquired only by experience. In this paper we show algorithms that determine the discrete numbers and parameters of the low-frequency filter automatically in accordance with the given region. This results from analyzing the function, which decides the shape of the given domain under the assumption that the degree of the problem depends of the transformation of a given domain, as seen in the Fourier Transform.

1. 서 론

등각사상을 구하는 문제는 표준영역에서 문제영역으로의 사상과 문제영역에서 표준영역으로의 사상으로 대별되며 2차원 Laplace방정식이 나타나는 열전도, 정

전(靜電) potential, 유체에 이용되는 등 공학이나 물리학에서 그 응용분야가 넓으며 함수론의 기본적인 문제이다. 여기서는 표준영역인 단위원의 내부에서 문제영역인 Jordan영역 내부로의 등각사상을 다루는데 이 사상의 결정은 경계대응함수에 관한 비선형 적분방정식인 Theodorsen방정식을 푸는 것으로 귀결된다. 기존의 Theodorsen 방정식의 해법이 있으나 그중 Hübner의 방

[†] 정 회 원 : 남서울대학교 컴퓨터학과 교수
논문접수 : 1999년 2월 26일, 심사완료 : 1999년 9월 9일

법은 수렴속도가 빠르고 기억용량과 계산코스트면에서 뛰어나다고 인정되고 있는 방법이다. 그의 방법은 2차 수렴하는 Newton법이며 통상 Newton법에 나타나는 Jacobian행렬을 만드는 대신에 Riemann-Hilber 문제로 해석하여 표본수 N에 대하여 $O(N^2)$ 의 기억용량을 $O(M)$ 으로 절약하였고 더구나 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용하여 $O(N^3)$ 의 계산량을 $O(M \log M)$ 의 계산량으로 절약한 효율적인 해법이다. 그러나, 수치실험 결과 난이도가 높다고 예상되는 문제에서는 수렴속도가 느려지는 단점이 지적되었다. 이 문제점은 본 연구자가 개발한 저주파필터에 의해 극복하여 난이도가 아주 높은 문제에서도 2차수렴에 가까운 빠른 속도의 수렴을 얻어 그 결과를 보고한 바 있다[1].

본 논문에서는 지금까지 경험에 의존했던 표본수와 저주파 필터의 파라메타가 주어진 문제영역에 따라 결정되어 등각사상을 자동적으로 결정할 수 있는 실용적인 알고리즘을 서술한다. 이것은 문제의 난이도가 문제영역의 변형에 의존한다는 전제로 문제영역의 모양을 결정하는 함수를 Fourier급수로 분석하여 얻을 수 있다.

2. 저주파필터에 의한 Hübner의 반복법

위에서 언급한 바와 같이 단위원 내부에서 Jordan 영역 내부에로의 등각사상을 구하는 문제는 비선형 적분 방정식인 Theodorsen 방정식을 푸는 문제로 귀결된다.

Theodorsen방정식의 유도과정은 이미 논문[1]에서 설명하였으므로 여기서는 생략하기로 한다. 문제영역의 경계가 $\rho(t)e^{it}$ 로 극좌표 표현(polar form)되는 영역이라 가정하면 Theodorsen방정식은 경계의 모양을 나타내는 함수 ρ 가 주어지고 미지수 τ 에 대한 다음과 같은 방정식이 된다.

$$\Psi\tau(t) = \tau(t) - K \log \rho(\tau(t) + t) = 0 \tag{1}$$

여기서 K 는 공역작용소(共役作用素)라 불리우며 함수 f 가

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt} \quad \hat{f}_k : f \text{의 } k\text{번째 Fourier 계수}$$

로 전개되었을 때

$$Kf \sim -i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sign}(k) \hat{f}_k e^{ikt}$$

로 정의되는 작용소이다.

수치계산을 하기 위해 이산화를 짝수 표본점 $N=2n$ 을 사용하여

$$t_j = 2\pi j/N, \quad t = (t_0, t_1, \dots, t_{N-1})^T$$

로 하고 t 의 함수인 f 를 t_j 상에서 이산화한 것을

$$f_j := f(t_j), \quad f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$$

로 한다.

공역작용소(共役作用素) K 는 다음과 같이 이산화 한다.

$$\begin{matrix} x \rightarrow F_N & (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n; b_1, b_2, \dots, b_{n-1})^T \\ & \downarrow \hat{K}_N \\ y \rightarrow F_N^{-1} & (0, -b_1, \dots, -b_{n-1}, 0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T \end{matrix}$$

F_N : 이산형 Fourier 변환

F_N^{-1} : 이산형 Fourier 역변환,

\hat{K}_N : 공역작용소에 의한 Fourier계수 변환

즉, 이산화된 공역작용소는

$$K_N := F_N^{-1} \hat{K}_N F_N$$

이 된다. 따라서 Theodorsen방정식(1)은 이산영역에서

$$\Psi(\tau) = \tau - K_N \log \rho(\tau + t) = 0 \tag{2}$$

이 된다. 스칼라 함수 σ 를 $s \in R^N$ 에 대하여

$$\alpha(s) := (\alpha(s_0), \alpha(s_1), \dots, \alpha(s_{N-1}))^T$$

로 정의하도록 하자.

논문[1]에서 제안한 Theodorsen방정식 (2)의 해법은 다음과 같이 Newton법과 저주파필터를 적용한 해법이다.

$$\begin{matrix} \Psi(\tau_k) + \Psi_{\tau_k} \delta_k = 0 \\ \tau_{k+1} = \tau_k + \delta_k \end{matrix} \tag{3}$$

$$\tau_{k+1} = L_{LF}(\tau_{k-1}) \quad k=0, 1, \dots \quad (k:\text{반복횟수})$$

여기서, L_{LF} 은 저주파 필터(low-frequency pass filter)로서

$$L_{LF}(e^{imt}) = \begin{cases} e^{imt} & : 0 \leq |m| \leq n - LF \\ 0 & : n - LF < |m| \leq n \end{cases} \quad (4)$$

로 정의한다. (4)식에서의 LF은 뒤에서부터 몇 개의 고주파 성분을 제거 할가를 나타내는 파라메터이고 $n = N/2$ (N : 표본수) 이다.

Hübner는 Newton법을 기억용량과 계산코스트의 효율화를 위하여 Riemann-Hilbert 문제로 해석하였는데 저주파필터를 적용한 반복법 (3)의 구체적인 계산 순서는 다음과 같다[1, 7].

- (1) $\xi_k = \rho'(r_k + t) / \rho(r_k + t) + i$
- (2) $\phi_k = \arg \xi_k - \pi/2$
- (3) $\sigma_k = \Psi r_k \sin \phi_k \exp(K_N \phi_k)$
- (4) $q_k = -\hat{\sigma}_0 \tan \hat{\phi}_0$
- (5) $f_k(e^{it}) = (iq_k + \sigma_k + iK_N \sigma_k) \exp(-K \phi_k + i \phi_k)$
- (6) $\delta_k = \frac{f_k(e^{it}) - i\Psi r_k}{\xi_k}$
- (7) $r_{k+1} = r_k + \delta_k$
- (8) $r_{k+1} = L_{LF}(r_{k+1})$

3. 저주파필터의 파라메터와 표본수

위에서 서술한 저주파필터에 의한 반복법에서 필요한 필터 파라메터 LF와 표본수 $N = 2n$ 는 지금까지 경험에 의존하여 적당히 결정하였다. 본 연구에서 제시하고자 하는 것은 주어진 문제영역과 허용오차에 따라 저주파필터의 파라메터와 필요한 표본수를 자동적으로 결정하는 알고리즘이다.

먼저 이미 발표한 논문[1]에서 주목할만한 결과를 살펴보면 다음과 같다.

- (1) 단위원에서 문제영역으로의 변형이 크면 클수록 난이도가 높다.
- (2) 난이도가 높을수록 저주파필터의 파라메터의 크기가 커진다.
- (3) 난이도가 높을수록 필요한 표본수의 크기가 커진다.

위의 결과로서 알 수 있는 것은 결국 난이도가 높을수록 저주파필터의 파라메터의 크기와 표본수의 크기가 커진다는 것이다. 또한, 문제영역의 변형에 따라 난

이도가 결정되므로 결국 문제영역의 모양으로 저주파필터의 파라메터와 표본수를 결정할 수 있다는 결론을 얻을 수 있다. 따라서 문제영역의 모양을 결정하는 함수를 다음과 같이 분석하였다.

여기서는 문제영역의 경계가 $\rho(t)e^{it}$ 로 극좌표 표현되는 영역이라 가정을 하는데 그러면 문제영역의 모양은 $\rho^n(t)$ 에 의해 결정된다. $\rho^n(t)$ 가 다음과 같이 Fourier 급수 전개 된다고 하고

$$\rho^n(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} d_v e^{ivt} \quad (5)$$

수치계산을 위해 (5)식에 대한 이산형 Fourier 급수 전개는 표본수 $N = 2n$ 에 대하여 다음과 같다고 하자.

$$\rho^n(t) \approx \sum_{v=-n}^n d_v e^{ivt} \quad (6)$$

그러면 결국 난이도를 결정하는 요소는 $\rho^n(t)$ 의 Fourier 계수인 d_v 이며 d_v 의 특징은 다음과 같다[2].

- (1) 문제영역이 Jordan 영역이므로 $|d_v|$ 는 단조감소 하며 $\lim_{v \rightarrow \infty} |d_v| = 0$ 이다.
- (2) 난이도가 높을수록 (문제영역의 변형이 클수록) $\lim_{v \rightarrow \infty} |d_v| = 0$ 이 되는 v 의 크기가 커진다.

논문[1]의 결과를 살펴 본바와 같이 난이도가 높을수록 저주파필터 파라메터의 크기가 커지므로 위의 특징을 이용하여 $|d_v|$ 의 크기로 저주파필터 파라메터의 크기를 결정할 수 있다. 여기서 (6)식의 이산형 Fourier 계수에 대하여

$$D_l := \sum_{v=l}^{\infty} |d_v| \quad (7)$$

인 D_l 를 정의하면 어떤 작은 수 δ 에 대하여 $D_l < \delta$ 을 만족하는 l 은 n 과 δ 를 고정시키면 위의 특징에 의하여 난이도가 높을수록 l 이 커지므로 l 을 저주파필터의 파라메터 LF로 결정하면 된다.

다음은 표본수의 결정에 대하여 생각하여 보자.

위의 특징으로 또 알 수 있는 사실은 $\rho^n(t)$ 의 Fourier 계수인 d_v 에 대하여 난이도가 높을수록 $|d_v| \rightarrow 0$ 이 되는 n 의 크기가 커진다는 것이다. 따라서 어떤 작은

수 e 을 고정시키면

$$|d_n| < e \quad (8)$$

이 되는 n 은 난이도가 높을수록 커지므로 필요한 표본 수 $N=2n$ 을 결정할 수 있다. 따라서 먼저 (8)식에 의해 표본수를 정한 다음 표본수를 고정시켜 (7)식에 의해 저주파필터의 파라미터를 결정하면 된다.

구체적인 알고리즘은 다음 장에서 논하기로 하자.

4. 자동화 알고리즘

앞에서도 서술했듯이 등각사상을 구하는 문제는 문제영역의 경계가 $\rho(t)e^{it}$ 로 극좌표 표현(polar form)되는 영역이라 가정하면 경계의 모양을 나타내는 함수 ρ 가 주어지고 미지수 t 에 대한 다음과 같은 Theodorsen 방정식을 푸는 문제로 귀결된다.

$$\Psi r(t) = \tau(t) - K \log \rho(\tau(t) + t) = 0$$

지금까지의 분석을 기초로 한 반복법의 순서도(flow chart)는 (그림 1)과 같다.

본 연구에서 수치실험을 위한 등각사상 예로서는 문제영역이 편심원(偏心圓)인 영역을 다루기로 한다. 이것은 수학적인 정해(正解)가 알려져 있어 반복법에 의한 해(근사치)의 오차를 알 수 있는 고전적인 예이기 때문이다.

주어진 조건과 구하고자 하는 해는 다음과 같다.

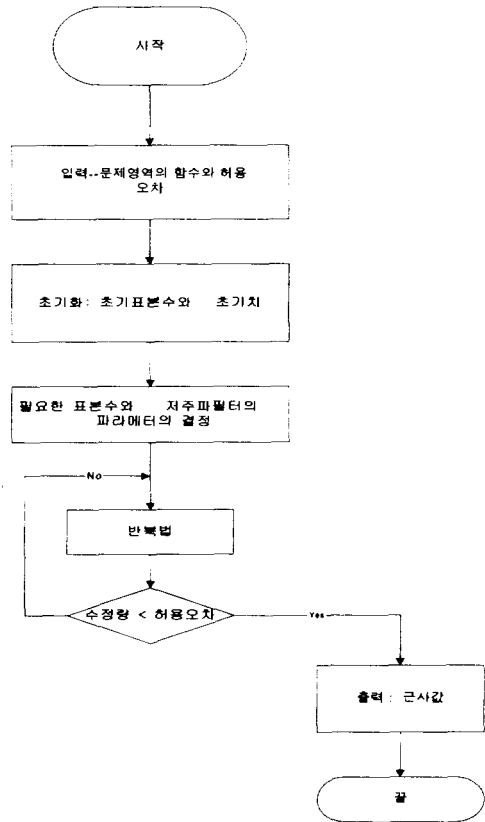
$$\text{주어진 조건: } \rho(s) = \frac{r \cos s + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 s}}{r + 1}, \quad 0 \leq r < 1$$

$$\text{구하고자 하는 정해: } \tau(t) = \arctan \frac{r \sin t}{1 - r \cos t}$$

여기서 r 은 문제영역의 복잡도를 나타내는 형상 파라미터로서 1에 가까이 갈수록 영역이 복잡해져 난이도가 높아진다.

순서도에 따른 구체적인 알고리즘은 다음과 같다.

- (1) 문제영역의 모양을 표현하는 함수 ρ 와 허용오차 $\epsilon = 10^{-10}$ 를 입력한다.
- (2) 초기표본수를 $N=8$ 로 하고 구하고자 하는 $\tau(t)$ 의 이산영역에서의 초기치로서 $\tau_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ 로 초기화한다.



(그림 1) 등각사상을 위한 자동화 알고리즘의 순서도

- (3) $\rho'(t)$ 의 Fourier계수 d_n 를 구한다.
- (4) 표본수 N 를 2배씩 늘려 가면서 $\rho^n(t)$ 의 고주파계수의 크기가 (8)식에서와 같이 $|d_n| < e$ 을 만족하도록 표본수 $N=2n$ 을 정하는데 여기서는 $e = 10^{-14}$ 으로 하였다.
- (5) 4에서 결정된 표본수에 대하여 (7)식에서 정의한 $D_1 < \delta$ 를 만족하도록 l 를 정하여 이것을 저주파필터의 파라미터 LF로 한다. 여기서는 $\delta = 10^{-3}$ 으로 하였다.
- (6) 2장에서 나열한 저주파필터를 적용한 반복법 (1)에서 (8)을 시행한다.
- (7) 수정량(현재의 근사값과 이전 근사값과의 차)이 허용오차 ϵ 보다 작은지를 판단한다. 즉 $\|\tau_k - \tau_{k+1}\|_2 < 10^{-10}$ (k : 반복횟수)를 만족하는지를 체크하고 만족하면 다음으로 만족하지 않으면 다시 (6)의

반복법을 시행한다.

(8) $r(t)$ 의 이산영역에서의 근사값 r_{k+1} 와 정해 r 의 차인 오차 $\|r - r_{k+1}\|_2$ 를 출력한다

5. 수치실험

수치실험을 위한 프로그래머로서는 FORTRAN Power Station을 사용하였고 배정도(double precision)로 하였다.

수치실험의 결과를 나타낸 표에서 나타낸 기호의 의미는 다음과 같다.

- k : 반복횟수
- γ : 문제영역 형상 파라메터
- N : 이산화한 표본수
- δ_k : $\|r_k - r_{k+1}\|_2$:수정량
- E_k : $\|r - r_{k+1}\|_2$:오차
- LF : 저주파필터의 파라메터

<표 1>은 주어진 문제에 따라 정해진 표본수와 저주파필터의 파라메터를 나타낸 것이다. 예상했던 바와 같이 문제가 어려울수록 즉 형상 파라메터 r 이 1에 가까이 갈수록 표본수와 필터 파라메터가 커짐을 알 수 있다.

<표 1> 문제영역에 따른 표본수와 저주파필터의 파라메터의 크기

r	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
N	32	64	64	128	256
LF	3	3	5	7	13

<표 2>과 <표 3>은 문제에 따라 결정된 필요한 표본수와 필터의 파라메터의 유효성을 검증하기 위해 수렴속도와 근사값의 오차를 나타내었다.

먼저 <표 2>에서 문제가 주어지면 즉, $r=0.3$ 이 주어지면 우선 표본수 $N=64$ 과 저주파필터의 파라메터 $LF=3$ 이 결정된다. 그리고 3회에 걸쳐 빠르게 수렴을 하고 오차도 약 5×10^{-14} 정도로 아주 작은 것으로 보아 자동으로 결정된 표본수와 저주파필터의 파라메터가 매우 유효함을 알 수 있다. <표 3>와 같이 문제의 난이도가 좀더 높은 $r=0.9$ 의 경우에도 같은 결과를 얻을 수 있었다. 즉 어려운 문제이기 때문에 예상한 바

와 같이 필요한 표본수와 저주파필터 파라메터가 늘어나 $N=256, LF=13$ 으로 결정되었으며 그것에 따른 반복법의 수렴횟수를 보면 6회로 빠른 수렴속도를 보였으며 오차도 약 1×10^{-5} 로 양호한 근사값을 얻을 수 있어 문제에 따라 결정된 표본수와 저주파필터의 파라메터가 유효함을 알 수 있다.

<표 2> $r=0.3$ 일 때 자동화 알고리즘의 반복법에 따른 수렴속도와 오차

$r=0.3 \quad N = 64 \quad LF = 3$		
k	δ_k	E_k
0	12.438	1.822E-01
1	1.822E-01	3.269E-05
2	3.269E-05	1.231E-12
3	1.229E-12	5.276E-14

<표 3> $r=0.9$ 일 때 자동화 알고리즘의 반복법에 따른 표본수와 수렴속도

$r=0.9 \quad N = 256 \quad LF = 13$		
k	δ_k	E_k
0	201.907	58.884
1	73.326E	22.931
2	21.030	2.196
3	2.168	3.291E-02
4	3.290E-02	1.498E-05
5	8.954E-06	1.006E-05
6	8.595E-13	1.006E-05

6. 결 론

등각사상을 구하기 위한 수치해법 중 Newton법인 Hübner의 방법은 수렴속도가 빠르고 기억용량을 대폭 절약한 효율적인 방법으로 알려져 있다[6, 7]. 그러나 수치실험 결과 난이도가 높은 문제에서는 수렴속도가 느려지는 단점이 지적되어 논문[1]에 저주파 필터에 의해 개량한 반복법을 제안하고 그 결과를 보고한 바 있다. Hübner의 방법으로 수렴속도가 느린 문제에 대하여 저주파 필터를 적용한 결과 수렴속도를 상당히 빠르게 할 수 있었으나 그 때 필요한 표본수와 저주파 필터의 파라메터의 크기는 경험에 의존 할 수밖에 없었다.

본 논문에서는 지금까지 경험에 의존했었던 저주파 필터의 파라메터의 크기와 필요한 표본수를 자동으로 결정하는 알고리즘에 대하여 제안하였다. 이것은 다음과 같은 논문[1]에서의 결과를 전제로 한 것이다.

- (1) 단위원에서 문제영역으로의 변형이 크면 클수록 난이도가 높다.
- (2) 난이도가 높을수록 저주파필터의 파라미터의 크기가 커진다.
- (3) 난이도가 높을수록 필요한 표본수의 크기가 커진다.

문제의 난이도가 문제영역의 모양에 의존한다는 전제로 문제영역을 결정하는 함수를 Fourier 급수로 전개하여 분석하였다. 그러면 문제영역을 결정하는 요소는 문제영역을 나타내는 함수 $\rho(t)$ 에 대하여 $\rho'(t)$ 의 Fourier 계수인 d_v 이다.

본 논문에서 제시한 알고리즘의 특징은 $\rho'(t)$ 의 Fourier 계수 d_v 의 성질을 이용하여 d_v 의 크기로 주어진 문제에 따라 필요한 표본수와 저주파필터의 파라미터의 크기를 자동으로 결정할 수 있다는 것이다. 난이도가 높을수록 필요한 표본수와 저주파필터의 파라미터의 크기가 자동적으로 커지며 수치실험을 통하여 그 유효성을 입증하였다.

이 알고리즘에서는 초기치를 임의로 주며 구하고자 하는 해를 알지 못하면 오차평가를 할 수 없다는 단점이 있다. 이것은 반복법의 일반적인 문제점이라 할 수 있으나 초기치에 따라 수렴하는 속도가 다르며 보통 구하고자하는 해를 모르기 때문에 알고리즘을 개발하는 것이므로 초기치와 오차평가의 문제점에 대해서도 앞으로 많은 연구가 필요하다고 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] 송은지, '등각사상에 있어 Theodorsen방정식의 고속해법', 한국정보처리학회 논문집 5권 2호, pp.372-379, 1998.
- [2] Samuel D. conte, Carl de Boor, 'ELEMENTARY NUMERICAL ANALYSIS,' McGRAW-HILL, 1985.
- [3] 송은지, '저주파 Filter를 이용한 Hübner반복법의 자동화 알고리즘', 한국정보처리학회 '98 춘계 학술

- 대회논문집, pp.98-108, 1998.
- [4] 송은지, '등각사상의 고속해법 개량에 관한 연구', 한국정보처리학회 '97 춘계학술 발표논문집, pp.905-910, 1997.
- [5] 宋殷志, 杉浦洋, 'Wegmann 法に基づく數値等角寫像の自動化について', 日本情報處理學會論文誌 35, No.2 pp.309-312, 1994.
- [6] 宋殷志, 杉浦洋, 櫻井鐵也: 等角寫像に關する Wegmann の方法の不安定性の の解析とその安定化, 情報處理學會論文誌 32, No.2, 1991.
- [7]. Gutknecht, M. H. 'Numerical conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation,' J. Comput. Appl. Math. 14, No.1, 2, pp.31-77, 1986.
- [8] Hübner, O. 'The Newton method for solving the Theodorsen integral equation,' J. Comput. Appl. Math. 14, No.1, 2, pp.19-29, 1986.
- [9] Wegmann, R. 'Discretized versions of Newton type iterative methods for conformal mapping,' J. Comput. Appl. Math. 29, No.2, pp.207-224, 1990.



송 은 지

e-mail : sej@nsu.ac.kr

1984년 숙명여자대학교 수학과 (이학사)

1988년 일본 나고야(名古屋)국립대학 정보공학과(공학석사)

1991년 일본나고야(名古屋)국립대학 정보공학과(공학박사)

1991년~1992년 일본 나고야(名古屋)국립대학 정보공학과 객원 연구원

1993년~1995년 연세대학교 전자계산학과 시간강사

1993년~1995년 상지대학교 병설 전문대학 전자계산학과 전임강사

1996년~현재 남서울대학교 컴퓨터학과 조교수

관심분야 : 수치해석, 컴퓨터 그래픽스 등.